

Introduction

La genèse de ce livre

Ce livre a de multiples racines et il est, par maints côtés, lié à mon histoire personnelle. Je fais partie d'une génération de mathématiciens, la dernière peut-être, qui a été nourrie au lait de la géométrie euclidienne : c'est sans doute en réfléchissant sur des problèmes de géométrie¹ que j'ai fait, pour la première fois, des mathématiques.

Malgré cela, mes débuts de mathématicien professionnel se sont déroulés assez loin de la géométrie. En effet, même si mon domaine de recherche s'appelle géométrie algébrique, il était, à l'époque, et après le passage de la tornade² Grothendieck, devenu beaucoup plus algébrique que géométrique. De même, l'enseignement que je dispensais à mes débuts, et notamment aux agrégatives de Sèvres³, était très éloigné de la géométrie de nos pères. Il a fallu la conjonction de deux événements pour que cet enseignement bifurque, au début des années 1980. D'abord, mon cours d'algèbre était écrit et disponible sous forme d'un polycopié, de sorte que le cours oral n'était plus aussi nécessaire, et ensuite, l'agrégation était devenue très difficile et toute impasse y était devenue impossible⁴. Cela m'a contraint à bâtir un enseignement de géométrie dans plusieurs domaines (géométrie projective, coniques, géométrie anallagmatique, polyèdres, etc.)⁵. C'est en construisant

1. Au collège, ou plus précisément au Cours Complémentaire, une filière, faite en principe pour mener les élèves de milieu modeste au BEPC, mais dont certains pouvaient tout de même émerger.

2. C'est dit sans la moindre nuance péjorative : j'ai une immense admiration pour l'œuvre de Grothendieck et je souscris très souvent à sa vision des mathématiques.

3. Il s'agit de l'École Normale Supérieure de Jeunes Filles.

4. Afin d'apaiser leur conscience, les jurys de concours s'arrangent toujours pour que le premier collé soit vraiment mauvais à leurs yeux. Dans le cas présent, le moyen d'assurer cet objectif avait été de proposer des couplages de leçons de géométrie.

5. J'ai appris une grande partie de ce que je sais en géométrie dans le livre de Marcel Berger, quand il n'était encore qu'un polycopié, écrit de sa main, photocopié et distribué sous le manteau comme un samizdat. Je profite de cette occasion pour lui rendre hommage.

cet enseignement que j'ai compris le sens du programme d'Erlangen et que j'ai commencé à en discuter les conséquences, notamment l'idée de mesurer la richesse d'une géométrie à l'aune des isomorphismes entre les divers avatars de son groupe.

Depuis cette époque, j'ai été amené à plusieurs reprises à enseigner la géométrie, à différents niveaux, et dans différents cadres. Tout d'abord, j'ai enseigné, pour la préparation à l'écrit du CAPES, la géométrie affine et la géométrie euclidienne, avec une entrée exclusivement fondée sur l'algèbre linéaire. Ensuite, j'ai enseigné, en licence pluridisciplinaire⁶, une géométrie plus élémentaire, plus proche de celle d'Euclide, avec une utilisation des invariants et des cas d'isométrie des triangles⁷ plus conforme aux idées que je défends sur le sujet.

Plusieurs occasions m'ont alors été données de mettre sur le papier mes idées mathématiques, épistémologiques et didactiques sur la géométrie et son enseignement et notamment en 1999 quand j'ai rédigé la partie géométrie du rapport d'étape de la commission Kahane⁸, voir [dpJPK02].

Enfin, le dernier événement important pour mon histoire de géomètre, celui qui m'a convaincu d'entreprendre la rédaction de ce livre, a été la rencontre avec Yves Martin, au cours de l'élaboration de sa thèse sur l'utilisation de Cabri en géométrie non euclidienne [Mar02]. J'y ai découvert une vision extraordinaire des géométries non euclidiennes qui m'a amené à réfléchir beaucoup plus avant sur leurs rapports entre elles et avec la géométrie euclidienne.

On notera que tous ces événements gravitent autour de l'**enseignement** de la géométrie. Cela n'étonnera pas ceux qui me connaissent et savent combien, dans toute ma carrière d'enseignant-chercheur, j'ai penché vers le premier terme, et plus particulièrement vers la formation des maîtres. J'essaie dans ce livre de donner – notamment aux futurs professeurs – une vision de la géométrie qui leur permette de voir autrement l'enseignement de cette discipline. Je reviendrai dans la postface sur ce que l'écriture de ce livre, y compris dans ses chapitres non euclidiens, m'a appris sur l'enseignement de la géométrie euclidienne.

6. Mise en place à Orsay à partir de 1998 et destinée à la formation des futurs professeurs des écoles, voir [Per05].

7. L'influence de mon épouse, vraie géomètre s'il en est, sur ma vision des choses et notamment sur ce point, est considérable.

8. De son nom officiel : Commission de Réflexion sur l'Enseignement des Mathématiques, mais elle était présidée de main de maître par Jean-Pierre Kahane.

Une vision de la géométrie

Avant d'entrer dans le vif du sujet, je souhaite avertir le lecteur en précisant ma vision de la géométrie. C'est d'ailleurs à dessein que je parle de **la** géométrie plutôt que des géométries, alors que ce livre en étudie pourtant au moins cinq (les géométries projective, elliptique, hyperbolique, anallagmatique et euclidienne). En effet, je voudrais insister ici plus sur son unité que sur sa diversité. Dans la postface, en revanche, je mettrai l'accent sur la singularité de la géométrie euclidienne.

La géométrie que j'essaie de décrire ici est celle d'un géomètre très algébriste⁹ par sa formation (voir [Per96], [Per95]), qui se reconnaît d'abord comme un disciple de Klein et de son célèbre programme d'Erlangen et dont le but plus ou moins avoué est la construction d'un calcul géométrique tel que le rêvait Leibniz :

Je croys qu'il nous faut encor une autre analyse proprement géométrique linéaire, qui exprime directement la situation¹⁰ comme l'algèbre exprime la grandeur. ... Les calculs y sont de véritables représentations de la figure et donnent directement les constructions.

Bref, tenter de réconcilier l'algèbre et la géométrie : voilà mon objectif.

Le programme d'Erlangen

Retour à Euclide

Avant de parler du programme d'Erlangen, je voudrais expliquer pourquoi il me semble déjà en germe dans les éléments d'Euclide¹¹. Examinons donc la preuve du premier cas d'égalité des triangles (Livre 1, proposition 4) :

Si deux triangles ont deux côtés égaux respectivement et les angles compris entre ces côtés égaux, ils auront de même égaux les troisièmes côtés et les triangles seront aussi égaux, ainsi que leurs angles restants opposés aux côtés égaux.

Voici, recopiée intégralement, la preuve d'Euclide :

Soient $AB\Gamma$ et ΔEZ deux triangles tels que l'on ait : $AB = \Delta E$, $A\Gamma = \Delta Z$ et $\widehat{BA\Gamma} = \widehat{E\Delta Z}$. Je dis qu'il est aussi $B\Gamma = EZ$ et que ces triangles

9. À l'inverse, l'aspect géométrie différentielle sera très peu présent dans ce texte, hormis au chapitre 2 de la Partie IV dans l'étude des différents modèles des géométries non euclidiennes.

10. Leibniz entend par là les propriétés géométriques.

11. Je m'appuie ici sur les traductions françaises de Kayas (voir [Euc78]) et Peyrard et sur la traduction anglaise de Heath.

sont égaux¹² et ont tous leurs autres éléments homologues égaux, c'est-à-dire que l'on aura aussi : $B\Gamma = EZ$, $\widehat{AB\Gamma} = \widehat{\Delta EZ}$ et $\widehat{A\Gamma B} = \widehat{\Delta ZE}$.

En effet, si l'on appliquait le triangle $AB\Gamma$ sur le triangle ΔEZ de manière à faire coïncider d'abord les points A et Δ , puis les côtés AB et ΔE , le point B coïnciderait avec E , car $AB = \Delta E$. Les côtés $A\Gamma$ et ΔZ coïncideraient alors aussi, à cause de l'égalité entre les angles $\widehat{BA\Gamma} = \widehat{E\Delta Z}$, de sorte que le point Γ à son tour coïnciderait avec Z , car $A\Gamma = \Delta Z$. D'autre part, les points B et E ayant déjà coïncidé, les côtés $B\Gamma$ et EZ coïncideront aussi, car si d'une part B et E et d'autre part Γ et Z coïncident mais les côtés $B\Gamma$ et EZ ne coïncident pas, deux droites pourraient délimiter une aire¹³, ce qui est impossible (Ax. 10). Nécessairement donc les côtés $B\Gamma$ et EZ coïncideront et ils seront égaux (Ax. 8).

Par conséquent, le triangle $AB\Gamma$ tout entier coïncidera avec le triangle ΔEZ tout entier et il lui sera égal, et les angles restants de l'un coïncideront avec les angles restants de l'autre et ils seront respectivement égaux entre eux, à savoir : $\widehat{AB\Gamma} = \widehat{\Delta EZ}$ et $\widehat{A\Gamma B} = \widehat{\Delta ZE}$.

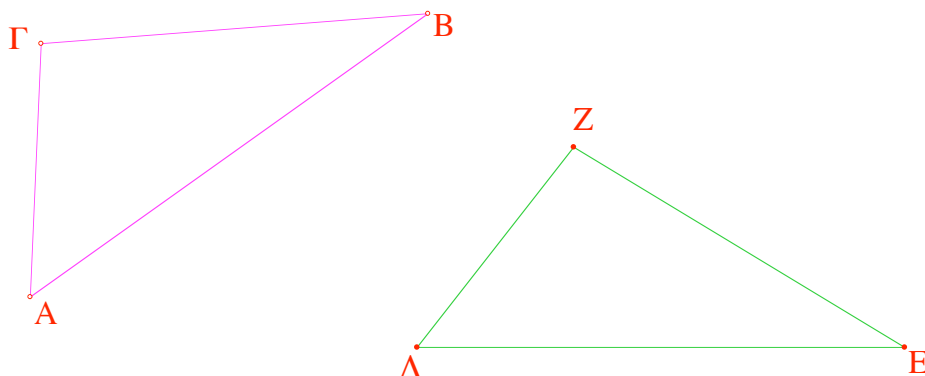


FIGURE 1 – Le premier cas d'égalité

Cette “preuve”, qui utilise la méthode dite de superposition, est celle que l'on donnait autrefois en classe de cinquième et elle convainquait la plupart des élèves. Cependant, le mathématicien attentif y décèle évidemment un point faible : que signifie le fait d'*appliquer*¹⁴ le triangle $AB\Gamma$ sur ΔEZ ¹⁵ ?

12. Sans doute Euclide entend-il ici : ont même aire.

13. Le recours à cet axiome est inutile et semble bien être un ajout des commentateurs, voir la traduction anglaise de Heath.

14. On notera que le mot utilisé ici (et qui semble admis par tous les traducteurs) est celui qui sera retenu dans le langage moderne.

15. Il y a beaucoup d'autres zones d'ombre dans cette démonstration. Par exemple,

Cette faille dans Euclide a été notée dès 1557 par Jacques Peletier et, en tous cas, David Hilbert, quand il a entrepris la refonte de l'œuvre d'Euclide, en était parfaitement conscient. La solution qu'il a adoptée est de prendre le premier cas d'égalité des triangles comme axiome et de bâtir le reste de la géométrie dessus. C'est une solution correcte, mais trop brutale à mon goût. Je serais plutôt en faveur d'une axiomatique qui permette de rendre valide la preuve d'Euclide et la méthode de superposition, si naturelle. Ce qui est nécessaire pour cela est de donner un sens à l'opération consistant à appliquer ou transporter une demi-droite sur une autre, propriété qui manifeste l'homogénéité du plan. Avec nos connaissances actuelles, on sent bien que derrière cela il y a la nécessité de la présence d'un **groupe** de transformations. Précisément, je propose de postuler qu'il existe un tel groupe qui opère transitivement¹⁶ sur les **drapeaux** (un point, une demi-droite d'origine ce point, un demi-plan limité par cette demi-droite)¹⁷. Un groupe qui opère transitivement sur un ensemble : on est au cœur du programme d'Erlangen, comme on va le voir.

Le programme d'Erlangen

Le programme d'Erlangen est la thèse de Felix Klein, soutenue en 1872 dans cette ville. Le travail de Klein arrive après l'explosion des géométries, survenue dans la première moitié du dix-neuvième siècle avec la création, à côté de la géométrie euclidienne classique, de la géométrie projective, développée par Poncelet, Plücker et d'autres, de la géométrie anallagmatique, où s'illustre en particulier Laguerre, des géométries non euclidiennes, avec Bolyai et Lobatchevski, etc. et il se veut une tentative d'**unification** de ces géométries. Le principe unificateur, adopté par Klein, est qu'une géométrie consiste, pour l'essentiel, en la donnée d'un ensemble¹⁸ X et d'un groupe

lorsqu'Euclide parle de faire coïncider les côtés, il pense sans doute aux demi-droites qui les portent, mais il faut aussi faire attention aux demi-plans. En particulier, Euclide n'envisage pas le cas où les triangles sont échangés par une isométrie négative.

16. Ce mot sera un des mots-clés de ce livre. Rappelons que, si un groupe G opère sur un ensemble X , on dit qu'il est **transitif** si l'on peut envoyer n'importe quel $x \in X$ sur n'importe quel y au moyen d'un élément de G .

17. Cette idée n'est pas nouvelle. Houël, au XIX-ème siècle, Bkouché plus près de nous, et d'autres sans doute, l'ont émise. R. Hartshorne développe dans [Har00] ce thème en définissant des mouvements : "rigid motions", mais il part de notions préliminaires de congruence des angles et des longueurs, alors qu'elles devraient pouvoir se déduire des mouvements. Il me semble donc qu'il reste une axiomatique à bâtir sur ce thème. C'est un de mes projets, voir un jour peut-être [Per50].

18. Ici, il faut noter un point essentiel : c'est l'espace qui devient primordial et plus les figures, comme c'était le cas auparavant, voir la postface de Russo dans le programme

G de transformations de X , autrement dit d'un groupe G opérant¹⁹ sur X . Les éléments de G sont les transformations “permises” dans la géométrie en question et elles caractérisent cette géométrie. Il s'agit, par exemple, des isométries (affines) pour la géométrie euclidienne plane, ou des transformations affines pour la géométrie affine plane, ou encore des homographies pour la géométrie projective. Le plus souvent, l'ensemble X est muni de données supplémentaires, par exemple un ensemble $\mathcal{D}$ de parties remarquables (les droites, les cercles,...) et les transformations de G conservent globalement $\mathcal{D}$. Les propriétés relatives à la géométrie en question (propriétés affines, euclidiennes, projectives) sont celles qui sont conservées dans l'action du groupe, ainsi que le dit Klein (cf. [Kle74] p.7) :

“étant donnés une multiplicité et un groupe de transformations de cette multiplicité, en étudier les êtres au point de vue des propriétés qui ne sont pas altérées par les transformations du groupe.”

Le programme d'Erlangen, c'est d'abord cela : une méthode de classification des résultats de géométrie, dont on verra plus bas comment elle peut être utilisée.

Par exemple, pour citer trois résultats célèbres, Pappus, qui n'emploie que les notions de concours et d'alignement, est un théorème projectif tandis que Thalès, qui utilise des parallèles, est un résultat affine et Pythagore, qui met en jeu longueurs et orthogonalité, est un théorème euclidien. On peut dire, en quelque sorte, que chaque théorème possède une (et une seule ?) **niche écologique privilégiée**, qui correspond au cadre dans lequel il s'énonce avec le plus de généralité et, souvent, où il se démontre avec le plus de facilité.

L'exemple du théorème de Pascal sur l'hexagone inscrit, frère jumeau de Pappus, illustre bien cette idée. Ce théorème s'énonce d'abord avec un cercle : si a, b, c, a', b', c' sont six points d'un cercle et si les droites (bc') et $(b'c)$ (resp. (ca') et $(c'a)$, resp. (ab') et $(a'b)$) se coupent en u (resp. v , resp. w), les points u, v, w sont alignés.

Il n'est pas difficile de montrer ce théorème dans ce cadre en utilisant le théorème de l'angle inscrit, il apparaît alors comme un théorème euclidien.

Il est clair cependant que ce théorème n'est pas énoncé là dans sa plus grande généralité. On peut aussi l'énoncer pour une ellipse. C'est alors un théorème affine. On peut enfin l'énoncer pour une parabole ou une hyperbole et il devient un théorème projectif. C'est d'ailleurs dans ce cadre qu'il est le plus facile à prouver ce qui est, somme toute, moral, puisque le théorème est

d'Erlangen, [Kle74] p. 62.

19. Pour la commodité, je dis les choses en langage moderne. La lecture du programme d'Erlangen n'est pas si facile pour un mathématicien des années 2000.

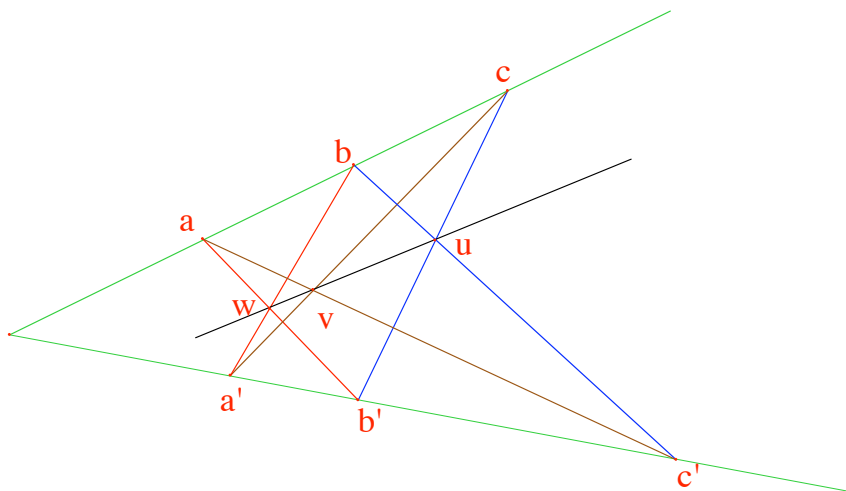


FIGURE 2 – Théorème de Pappus : u, v, w sont alignés

ici débarrassé de la gangue des notions affines et euclidiennes inutiles. Deux preuves me semblent particulièrement pertinentes :

- Celle qui utilise **l'invariant** fondamental associé à une conique : le birapport.
- Celle qui consiste à prouver le résultat dans le cas euclidien et à utiliser un argument de **transitivité** pour passer au cas général : il existe une homographie qui transforme un cercle en une conique quelconque (c'est essentiellement la méthode de Pascal).

Ce qui précède montre que la géométrie projective présente un indéniable intérêt par elle-même puisque nombre de théorèmes (Pappus, Pascal, mais aussi Céva, Desargues, Newton, que nous rencontrerons plus tard) ne se comprennent bien qu'en projectif. Mais, plus important encore, comme Klein l'explique, toutes les autres géométries usuelles en sont issues. C'est tout le sujet de ce livre et, en attendant mieux, l'objet du paragraphe suivant.

La géométrie projective, mère de toutes les géométries

Discussion sur les axiomatiques

Avant de préciser le rôle de la géométrie projective, il est nécessaire de dire un mot des fondements. Il y a plusieurs types d'axiomatiques possibles pour la géométrie, qu'elle soit euclidienne ou non, affine ou projective. Je

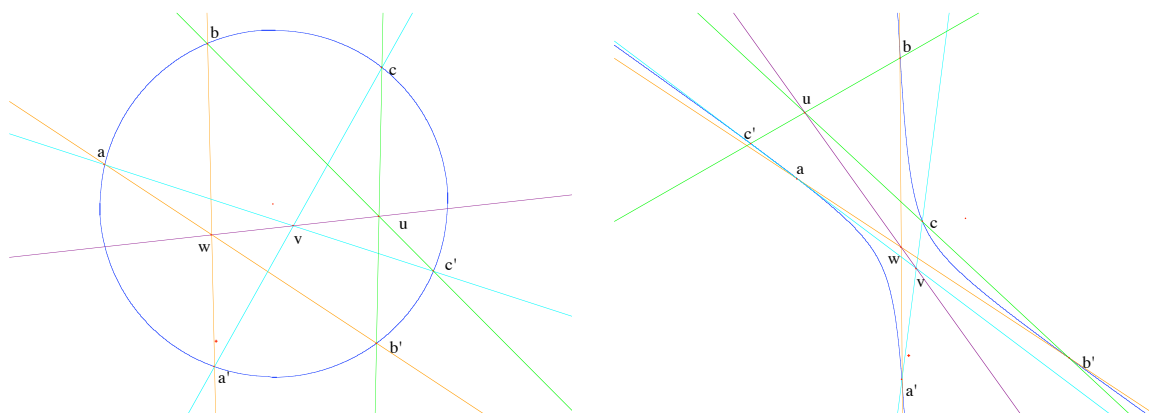


FIGURE 3 – Théorème de Pascal : u, v, w sont alignés

n'en retiens ici que deux²⁰ :

- La première, la plus ancienne, est celle d'Euclide, corrigée par Hilbert (voir [Hilbert]), avec de nombreuses variantes, voir [Lio01], [CF95], ou – s'il est écrit un jour – [Per50]. Toutes ces axiomatiques partent de la définition du plan comme un ensemble de points muni de parties remarquables : les droites, avec des axiomes d'incidence et d'ordre. Il faut ensuite quelque chose qui assure l'homogénéité du plan (cas d'égalité, existence de symétries, transitivité sur les drapeaux, etc.) Ces axiomatiques, jusque là, sont aussi valables pour les géométries non euclidiennes. Ce n'est que lorsqu'on introduit l'axiome des parallèles (le fameux postulat d'Euclide) qu'elles se séparent.

- La seconde est celle qui passe par l'algèbre linéaire, sur le corps des réels ou un autre. Elle permet de définir à la fois les espaces affines, euclidiens ou non, les espaces projectifs, la géométrie euclidienne et les autres. Elle est maintenant bien connue, au moins au niveau du savoir universitaire. Dans le cas de la géométrie projective plane, le plan projectif $\mathbf{P}(E)$ est défini à partir d'un espace vectoriel E de dimension 3 sur un corps commutatif k , voir Partie I ci-dessous.

Les coordonnées et le choix du linéaire

La question du choix d'une axiomatique est complexe. Elle peut être gouvernée par des raisons diverses, notamment didactiques. Sur le plan purement mathématique en tous cas, ce qu'il faut bien comprendre c'est qu'il est illusoire de vouloir séparer les domaines géométriques et numériques²¹ :

20. On peut citer aussi celle de Bachmann à base d'involutions, voir [Bac59].

21. Le débat entre géométries analytique et synthétique qui a agité le XIX-ième siècle nous semble maintenant bien stérile.

le nombre est dans la géométrie comme le ver est dans le fruit, ainsi qu’Emil Artin l’a montré très clairement (voir [Art62] ou Partie I Chapitre 4 ci-dessous). C’est l’une des faiblesses de la mathématique grecque de ne pas avoir pu prendre en compte ce fait, faute sans doute d’une manipulation simple des nombres²². Comme l’explique Lebesgue, l’invention des nombres décimaux par Stevin, au XVI-ième siècle, a sans doute joué un rôle crucial en permettant la naissance de la géométrie analytique²³.

Dans ce texte nous choisirons d’utiliser l’entrée par le linéaire, pour plusieurs raisons :

- Pour un mathématicien d’aujourd’hui, c’est de loin la plus simple²⁴ et, au niveau où se place ce livre, on peut supposer que les notions d’espace vectoriel et d’application linéaire sont suffisamment familières au lecteur pour que cette définition ne pose pas de problème.
- Toutes²⁵ les autres axiomatiques peuvent s’y ramener.

Attention, ce choix n’est en aucun cas un choix didactique pertinent, au moins pour le collège et le lycée, comme l’échec de la réforme des “mathématiques modernes” l’a amplement montré. Nous reviendrons sur ce point dans la postface.

Groupes, représentations linéaires et projectives

Une autre raison qui conforte le choix du linéaire est en germe dans la formulation du programme d’Erlangen donnée ci-dessus : une géométrie c’est un groupe G **opérant** sur un ensemble X . Le sujet de notre étude est donc plus les opérations des groupes (c’est-à-dire leurs représentations comme groupes de permutations ou d’automorphismes) que les groupes abstraits. De ce point de vue, les algébristes connaissent bien l’intérêt²⁶ des représentations linéaires des groupes (le cas où X est un espace vectoriel E

22. Chez les Grecs, les rationnels ne sont pas considérés comme des nombres mais comme des rapports de grandeurs, au travers de la théorie des proportions, qui contient aussi en germe les nombres réels. Il est indéniable que la théorie des proportions est une belle construction, parfaitement rigoureuse, mais elle est très délicate à utiliser.

23. Et surtout de l’analyse, mais ce n’est pas notre sujet.

24. On comparera l’efficacité de l’approche proposée ici avec les contorsions auxquelles on est obligé de se livrer dans d’autres cadres. Le lecteur examinera par exemple les preuves du concours des droites remarquables du triangle (en géométrie non euclidienne) données dans ce livre et celles de Bachmann, voir [Bac59].

25. Un bémol : en travaillant d’emblée sur un corps on perd certaines géométries planes exotiques (plans de Moufang, etc., cf. [Hal76]). En revanche, les géométries “à la Bachmann”, définies à partir des involutions se ramènent au cas linéaire, cf. [Bac59].

26. Au point que certains esprits forts pensent même que la bonne notion n’est pas celle de groupe, mais celle de représentation.

et où G est contenu dans le groupe des automorphismes $GL(E)$). Bien sûr, le cas linéaire n'est pas très intéressant géométriquement à cause de l'origine de l'espace qui y est imposée, mais, intimement liées aux représentations linéaires, ce sont les représentations projectives de G qui vont jouer ici le rôle essentiel. L'ensemble X est alors contenu dans l'espace projectif $\mathbf{P}(E)$ et G contenu dans le groupe des homographies $PGL(E)$.

Cette entrée par le linéaire permet bien sûr la définition des notions géométriques de base (points, droites, plans, sous-espaces projectifs, vus comme les zéros des équations linéaires), avec leurs propriétés d'incidence naturelles. Mais elle donne en plus *via* les opérations naturelles sur l'algèbre extérieure $\bigwedge E$ ou symétrique $S(E)$ induites par l'action de G sur l'espace vectoriel E , les objets définis par des équations polynomiales de plus grand degré : coniques, quadriques, etc. qui vont être au centre de notre étude.

Le corps de base

Un mot sur le corps de base. Bien entendu, celui qui retiendra le plus notre attention est le corps des réels, et nous veillerons à retrouver les notions classiques, en particulier tout ce qui est lié à l'ordre : demi-plans, demi-droites et leurs angles, etc. Mais nous nous intéresserons aussi au cas général, ne serait-ce que pour comprendre que des cas en apparence différents sur les réels (on pense aux géométries hyperbolique et elliptique) peuvent être plus proches qu'on ne le pense.

Les autres géométries sont dans la projective

L'idée essentielle développée par Klein c'est que toutes les géométries peuvent être obtenues à partir de la géométrie projective et d'une donnée supplémentaire.

Le cas le plus simple est celui de la géométrie **affine**. Si l'on dispose d'un plan projectif réel, on récupère le plan affine comme complémentaire d'une droite projective D_∞ choisie arbitrairement comme droite à l'infini. Il est immédiat de décrire les propriétés affines en termes de cette droite. Ainsi, deux droites sont parallèles si elles se coupent sur D_∞ . Une conique est une hyperbole, une parabole ou une ellipse selon qu'elle coupe D_∞ en 2, 1 ou 0 points.

On obtient ensuite un plan vectoriel en fixant un point arbitraire. Quand on est dans le plan affine, on obtient la géométrie euclidienne en se donnant une forme quadratique définie positive sur le plan vectoriel associé, ou encore, comme on le verra dans la Partie V, en se donnant deux points imaginaires à l'infini : les fameux points cycliques.

On obtient aussi, à partir du plan projectif réel $\mathbf{P}(E)$, les géométries non euclidiennes en se donnant une forme quadratique²⁷ q non dégénérée sur E . Si la forme est définie positive, donc anisotrope, $(X^2 + Y^2 + T^2)$ on a la géométrie **elliptique**, si elle est de Lorentz $(X^2 + Y^2 - T^2)$, la géométrie **hyperbolique**. On verra aussi, Partie V, que le cas d'une forme dégénérée parabolique $X^2 + Y^2$ redonne la géométrie euclidienne ordinaire, et ce point de vue permet de mieux comparer les trois géométries métriques. Dans toutes ces géométries, la notion première (avant même celle de distance) est la notion d'orthogonalité (que l'on appelle aussi conjugaison dans certains cas).

Une autre façon de retrouver la géométrie euclidienne consiste à partir de la droite projective, mais cette fois sur $\mathbf{C}$. Ensemblistement, cette droite est en bijection avec $\hat{\mathbf{C}} = \mathbf{C} \cup \{\infty\}$ et on récupère le plan affine euclidien, en bijection avec $\mathbf{C}$, en enlevant le point à l'infini (ou plus généralement un point quelconque). On obtient ainsi la géométrie **anallagmatique**.

On notera que la géométrie projective, dans les deux cas, apparaît comme une **compactification** de la géométrie euclidienne.

Quels groupes ?

Les divers groupes

Un dernier intérêt de l'entrée par le linéaire, c'est qu'elle rend transparent le choix des groupes à considérer. Dans le cas de la géométrie projective, le plan projectif $\mathbf{P}(E)$ est associé à un espace vectoriel E de dimension 3 et le groupe qui vient avec cet espace est le groupe linéaire $GL(E)$ des automorphismes de E , isomorphe au groupe des matrices 3×3 inversibles. En fait, le groupe intéressant est plutôt le groupe projectif $PGL(E)$ quotient de $GL(E)$ par les homothéties (qui sont triviales dans le projectif à cause de l'homogénéité des coordonnées). Les éléments de $PGL(E)$ sont appelés homographies. Pour obtenir la géométrie affine, on se limite aux homographies qui conservent D_∞ , pour obtenir les groupes des géométries métriques on considère le groupe $O(q)$ des automorphismes qui conservent la forme quadratique donnée et sa variante projective $PO(q)$.

On utilisera abondamment les propriétés algébriques de ces groupes dans ce qui suit. Dans le cas des groupes orthogonaux, on a essayé de montrer les points communs entre les divers cas (et surtout entre les géométries elliptique et hyperbolique, le cas euclidien étant singulier) et notamment le rôle crucial joué par les involutions²⁸ (c'est-à-dire les symétries), qui donnent les points

27. Avec une forme alternée on obtient une géométrie symplectique (mais nous ne rencontrerons pas ce cas qui n'est intéressant qu'en dimension vectorielle paire).

28. On rejoint ici le point de vue de Bachmann qui fonde toute la géométrie sur les

de Frégier, les milieux, médiatrices ou bissectrices, voire les points bissecteurs. La raison algébrique de cette importance est évidemment le théorème de Cartan-Dieudonné qui assure que les involutions engendrent $O(q)$.

Isomorphismes de groupes et géométries riches : le choix de la géométrie plane

Les paragraphes IV, V, VI du programme d'Erlangen sont consacrés à illustrer une idée importante : si deux géométries correspondent à des opérations d'un **même** groupe (mais vu avec d'autres oripeaux) sur des ensembles différents, ce sont essentiellement les mêmes géométries. Klein donne plusieurs exemples de ce phénomène. En langage moderne, ces exemples correspondent à des isomorphismes bien connus (cf. [Per96] ou [Die70]) entre groupes orthogonaux $PO(q)$ et linéaires $PGL(n, k)$, en particulier :

- L'isomorphisme $PO(q) \simeq PGL(2, \mathbf{R})$, où q est une forme de Lorentz réelle à 3 variables, c'est à dire une forme de signature $(2, 1)$.
- L'isomorphisme $PO(q) \simeq PGL(2, \mathbf{C})$, où q est une forme de Lorentz réelle à 4 variables, donc de signature $(3, 1)$.
- L'isomorphisme $PO(q) \simeq PGL(4, \mathbf{R})$, où q est une forme hyperbolique réelle à 6 variables, c'est-à-dire de signature $(3, 3)$.

Ces isomorphismes ont chacun une interprétation géométrique. Le premier²⁹ explique que la géométrie d'une droite projective et celle d'une conique propre, ou encore la géométrie hyperbolique du plan, sont une seule et même géométrie. On rencontrera abondamment cet isomorphisme dans ce livre, notamment Partie III. Il n'est pas inutile ici de donner la formulation de Klein pour mesurer la difficulté d'une lecture du texte originel :

La théorie des formes binaires et la géométrie projective des systèmes de points d'une conique sont équivalentes, c'est-à-dire qu'à chaque théorème relatif aux formes binaires correspond un relatif à ces systèmes de points et réciproquement.

Nous verrons plus bas le lien entre Erlangen et la théorie des invariants. La conséquence d'un tel isomorphisme sur cette théorie c'est qu'une géométrie qui, comme celle-ci, se présente sous deux habits différents, possède les deux types d'invariants correspondants. Dans le cas présent, il s'agit d'une part du birapport, invariant de la droite projective, et d'autre part des invariants liés à la forme quadratique qui définit la conique et qui permettent de définir ortho-

involutions.

29. Le second isomorphisme est au cœur de la géométrie anallagmatique, voir Partie VI. Le dernier correspond à la géométrie des droites de $\mathbf{P}^3$ et ne sera pas abordé dans ce livre.

gonalité, distance et angles au sens hyperbolique³⁰. L'existence d'un isomorphisme de groupes comme ci-dessus, avec comme sous-produit la cohabitation de deux types d'invariants et la profusion de théorèmes qui en résulte, est caractéristique d'une géométrie **riche**, donc particulièrement digne d'intérêt. Or les isomorphismes entre groupes classiques ont été déterminés de manière systématique (voir [Die70]) et on montre qu'il n'y en a qu'en dimension vectorielle ≤ 5 . Autrement dit, si on accepte la définition de géométrie riche proposée ci-dessus, il n'y a de telles géométries qu'en petite dimension.

Dans ce qui suit, nous avons fait le choix de nous limiter à la géométrie de la droite projective et surtout du plan projectif (sauf au chapitre 1 de la Partie I), donc de travailler en dimension vectorielle 2 ou 3. Le poids déjà important de ce livre est en soi une première justification de ce choix. Mais le paragraphe précédent est une justification autrement importante : géométrie ou dimension, il faut choisir !

Erlangen et transitivité

On a vu que la notion de transitivité était déjà en filigrane dans Euclide et qu'elle menait à une preuve du théorème de Pascal. En vérité, la question de la transitivité est centrale dans la perspective du programme d'Erlangen : le groupe G est-il transitif sur les points X , sur les droites, sur les drapeaux (couples formés d'une droite et d'un point situé sur cette droite) ? L'est-il sur les couples de points ou de droites ? Cette problématique va notamment mener à la notion de repère en géométrie projective.

Voici un exemple de son utilisation, dans la perspective de classification des théorèmes proposée par le programme d'Erlangen.

Erlangen et transitivité, un exemple en géométrie affine

Le principe

1) On repère que le problème est un problème affine. Cela signifie qu'il peut mettre en jeu les notions d'alignement, de concours, de parallélisme, de milieux, de rapports de mesures algébriques sur des droites parallèles, de

30. Bien entendu, ces deux types d'invariants se calculent les uns à partir des autres. Par exemple, pour quatre points de la conique, on a la formule : $\llbracket a, b, c, d \rrbracket^2 = \frac{\varphi(a, c)\varphi(b, d)}{\varphi(b, c)\varphi(a, d)}$ si on note φ la forme polaire de q , mais le fait qu'ils apparaissent sous deux formes multiplie les théorèmes.

barycentres, d'aires³¹ (mais pas de longueur, d'angle et d'orthogonalité qui sont des notions euclidiennes).

2) On effectue une transformation affine f (qui conserve les notions ci-dessus³²) de façon à transformer le problème en un problème plus simple. Le plus souvent cela revient à traiter un cas particulier du problème présentant une propriété euclidienne supplémentaire (on transforme un triangle quelconque en un triangle équilatéral, un parallélogramme en un carré, etc.). Dans cette phase on utilise des résultats de **transitivité**.

3) On résout le problème ainsi simplifié (y compris, éventuellement, avec des outils euclidiens) et on revient au cas initial par la transformation inverse f^{-1} .

Voici un exemple (sans grand intérêt, mais révélateur) d'application de cette technique. On veut montrer que les médianes d'un triangle sont concourantes. Comme la notion de médiane est affine, on aura gagné si on montre qu'on peut transformer le triangle en un triangle équilatéral par une application affine. En effet, les médianes seront alors aussi les médiatrices et on montre facilement que celles-ci sont concourantes. Le point crucial est donc le lemme suivant :

Lemme. *Le groupe affine est transitif sur les triangles.*

Démonstration. Il s'agit d'envoyer trois points A, B, C sur A', B', C' (non alignés). On commence par envoyer A sur A' par translation. Ensuite, il y a au moins deux façons de faire.

1) Les points B et C sont transformés en B'' et C'' . Il ne reste plus qu'à effectuer la transformation linéaire (avec A' comme origine) qui envoie la base $\overrightarrow{A'B''}, \overrightarrow{A'C''}$ sur $\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}$ et on a gagné.

2) On détaille le processus en utilisant successivement une rotation pour amener (AB) sur $(A'B')$, une homothétie pour envoyer B en B' , une translation pour déplacer C sur la parallèle à (AB) et rendre le triangle isocèle, enfin une affinité pour finir le travail.

Les tiers

Les problèmes d'aires sont sans doute, dans le cas affine, ceux qui se prêtent le mieux à l'utilisation des principes d'Erlangen. Voici un exemple de ce type.

31. Les aires (ou plutôt leurs rapports) sont un invariant affine, et pas seulement euclidien, comme on le voit en regardant l'effet d'une symétrie oblique sur un triangle.

32. Dans le cas des aires, une application affine générale conserve seulement les rapports d'aires, mais cela suffit dans la plupart des applications.

Soit ABC un triangle, I, J, K des points situés respectivement sur les côtés $[BC]$, $[CA]$, $[AB]$ au tiers le plus proche de B, C, A . Les droites (BJ) et (CK) , (CK) et (AI) , (AI) et (BJ) se coupent respectivement en P, Q, R . Déterminer l'aire du triangle PQR en fonction de celle de ABC .

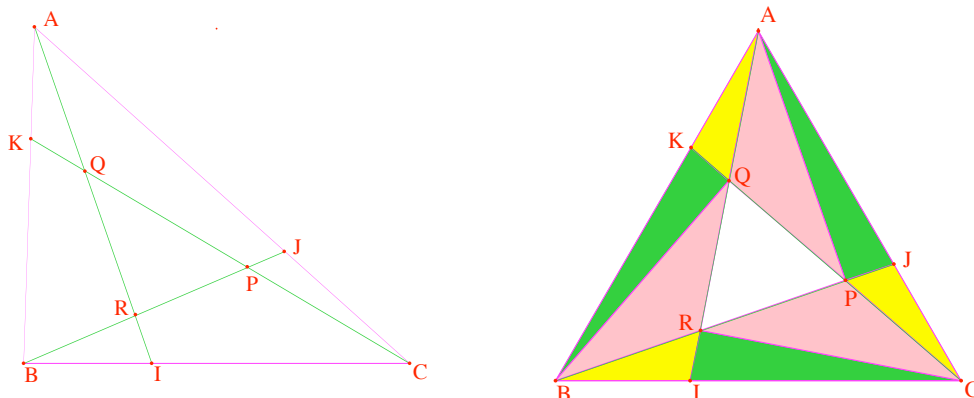


FIGURE 4 – Les tiers

Le problème est clairement affine (les seules notions mises en jeu sont les rapports $1/3$ sur une même droite et les rapports d'aires). On peut donc, pour le résoudre, le transformer par une application affine. On peut alors supposer que l'on est dans le plan euclidien et on transforme ABC en un triangle **équilatéral** $A'B'C'$ de centre O comme on l'a vu ci-dessus. On dispose alors d'un outil supplémentaire³³ : les rotations de centre O et d'angles $\pm 2\pi/3$ qui permutent A, B, C, I, J, K et P, Q, R . On en déduit nombre d'égalités d'aires, dont celles des triangles roses APQ , BQR et CRP et des triangles jaunes ABQ , BCR et CAP . Avec $IC = 2IB$, on voit que le triangle QCR est d'aire double de QRB (c'est le lemme du chevron de [Per05]) et on en déduit que le triangle blanc central a même aire que le rose CRP . Le lemme des proportions (*loc. cit.*), appliqué dans CQR , montre que l'on a $PQ = PC$, et en l'appliquant dans AQC on en déduit que l'aire de APQ est égale à celle de APC , donc que les aires jaunes et roses sont égales. En définitive, l'aire de PQR est le septième de celle de ABC .

Pour une preuve élémentaire directe, voir [Per05] exercice 223. Pour d'autres exemples affines voir [JCD01], [Per08]. Pour un exemple projectif très simple,

33. En vérité, cette transformation existe aussi dans le cas général : il existe une application affine qui permute (encore la transitivité) les points A, B, C et donc aussi les points I, J, K et P, Q, R , mais elle est moins évidente, au sens propre du terme.

le “théorème à quatre points ”, voir ci-dessous Partie I ??.

Transitivité, orbites et invariants

Orbites

Ce qui précède montre l’importance de la transitivité dans l’application du programme d’Erlangen. Bien entendu, l’action d’un groupe G sur un ensemble X n’est pas toujours transitive, mais ce défaut de transitivité n’est pas moins intéressant, car il conduit à la notion d’**orbite** : l’orbite de x est l’ensemble des $y \in X$ que l’on peut atteindre à partir de x *via* G . Les orbites forment une partition de X et on leur associe une relation d’équivalence $\sim$ définie ainsi : deux points sont équivalents si et seulement si ils sont dans la même orbite ($x \sim x' \iff \exists g \in G, g.x = x'$). La détermination de l’ensemble X/G des orbites est un résultat essentiel dans une géométrie donnée, comme on le verra dans ce qui suit (voir par exemple ce qui concerne le birapport dans la Partie I, le chapitre sur les quotients de la Partie II, celui sur les cas d’isométrie de la Partie IV, etc.).

Invariants

Obstructions, invariants, critères de transitivité

Pour déterminer le quotient X/G il est nécessaire d’avoir des critères permettant d’affirmer que deux objets sont dans la même orbite et cette question mène tout droit à la notion d’invariant. En effet, la stratégie usuelle pour décrire X/G consiste à le paramétrer, et c’est la procédure suivante :

1) On repère des **invariants** de X sous G , autrement dit on construit une application $\Phi : X \rightarrow Y$, avec pour Y un espace “numérique”, disons pour simplifier du type $\mathbf{R}^n$. On a donc $\Phi(x) = (\Phi_1(x), \dots, \Phi_n(x))$ et on suppose que $x' = g.x$ (c’est-à-dire $x \sim x'$) implique $\Phi(x) = \Phi(x')$. Autrement dit : si deux éléments sont dans la même orbite, ils ont mêmes invariants. L’application Φ induit alors une application $\bar{\Phi} : X/G \rightarrow Y$ définie par $\bar{\Phi}(\bar{x}) = \Phi(x)$.

2) On veut que Φ soit un **système complet d’invariants**, ce qui signifie qu’on a l’équivalence $x \sim x' \iff \Phi(x) = \Phi(x')$ ou encore que $\bar{\Phi}$ est injective. Lorsqu’on a un tel système on peut formuler ainsi les résultats de transitivité :

Deux éléments x et x' de X sont dans la même orbite si et seulement si leurs invariants (repérés par $\Phi(x)$ et $\Phi(x')$) sont les mêmes.

3) Il reste enfin à préciser **l’image** de Φ ou de $\overline{\Phi}$, c’est-à-dire à déterminer quels sont les invariants possibles.

Si on a réalisé ces trois opérations, X/G est connu³⁴. Ce point est mentionné par Klein : *On donne une multiplicité et un groupe de transformations ; développer la théorie des invariants relative à ce groupe.*

Nous verrons apparaître ainsi, tout au long de ce livre, des invariants qui mesureront le défaut de transitivité d’une opération : le birapport dans l’opération de $PGL(2)$ sur les quadruplets de points de la droite³⁵, le crochet et sa variante affine, l’aire, pour l’opération de $SL(E)$, etc. Dans le cas de la géométrie métrique, le groupe est transitif sur points, droites et drapeaux (au moins si le corps n’est pas trop mauvais), mais les invariants (longueurs, angles) apparaissent comme des obstructions à la transitivité multiple. On a essayé d’en donner des définitions identiques en géométrie elliptique et hyperbolique, en introduisant l’invariant anallagmatique, quitte à retrouver les invariants usuels de la littérature.

En géométrie hyperbolique, nous retrouverons les orbites et les invariants à propos de la définition de la notion de cercle et de ses variantes (équidistante, horicycle³⁶) et les phénomènes de simple transitivité des sous-groupes abéliens de transformations qui laissent stable une droite ou un point mèneront à des notions partielles de vecteurs et d’angles orientés.

Nous verrons enfin comment tous ces invariants permettent de faire de la géométrie (voir par exemple Partie I, Chapitre 3 l’utilisation du birapport).

Une idée importante : la dimension

Pour étudier X/G , un outil important est la notion de dimension des variétés algébriques³⁷. En termes intuitifs, la dimension d’un objet géométrique est simplement le nombre de paramètres³⁸ dont il dépend. On peut alors montrer – dans les bons cas – la formule $\dim X/G = \dim X - \dim G$ et

34. Au moins ensemblistement, car on espère pouvoir le munir de structures additionnelles, notamment de variété, analogues à celles de X . En vérité, la construction d’une telle structure sur X/G est, en général, excessivement difficile, voir [Mum65] ou Partie II Chapitre 7, mais on peut souvent construire le quotient pour les objets “génériques”. Comme le dit Mumford : *To construct both orbit spaces and moduli “generically” are simple exercises.*

35. On peut citer aussi le rapport des mesures algébriques pour l’opération du groupe affine sur les triplets de points d’une droite.

36. Appelé aussi horocycle.

37. Ou différentiables selon les goûts.

38. C’est d’ailleurs ainsi que Klein utilise ce concept. Il dit, par exemple : *Soit A une droite et B la triple infinité de transformations linéaires qui la reproduisent* – il s’agit de $PGL(2)$.

cela permet de préciser le nombre d'invariants nécessaires pour décrire le quotient X/G . Ainsi, dans le cas où X est l'espace des triangles du plan euclidien (de dimension 6) et G le groupe des isométries (de dimension 3), on a $\dim X/G = 3$ et on a donc besoin de trois paramètres pour décrire ce quotient. Ces paramètres vont être des longueurs et des angles et on retrouvera ainsi les cas d'isométrie des triangles chers à Euclide. Leur intérêt majeur est justement lié à la transitivité : il s'agit de fournir un critère pour qu'on puisse envoyer un triangle sur un autre par une isométrie, sans être obligé de l'exhiber explicitement et c'est cela qui en fait toute la force : *il peut le faire* comme auraient dit Pierre Dac et Francis Blanche³⁹.

Invariants, relations et théorèmes

L'origine des relations

Dans la situation générale du programme d'Erlangen, on a un groupe G qui opère sur un ensemble X et on cherche à déterminer le quotient X/G . On a vu qu'une façon d'aborder le problème est d'utiliser un système complet d'invariants, donc de construire une application injective $\Phi : X/G \rightarrow Y$ où Y est l'espace des invariants, en général un espace affine ou projectif. Il s'agit de déterminer l'image de Φ . En général, lorsqu'on a $\dim Y > \dim X - \dim G$, cette application n'est pas surjective, autrement dit on a "trop" d'invariants. Dans ce cas, les invariants ne sont pas indépendants, il y a des **relations** entre eux, et le sous-espace X/G de Y est une variété définie par une équation algébrique au moins. Nous allons voir que ces relations sont le cœur même de la géométrie associée. Voici deux exemples typiques de cette situation.

Exemple 1 : le groupe orthogonal du plan vectoriel

Considérons l'opération du groupe orthogonal euclidien $O(q)$ (rotations et symétries orthogonales vectorielles) sur les couples (a, b) de vecteurs $a = (a_1, a_2)$ du plan, donc sur un espace de dimension 4. Comme $O(q)$ est de dimension 1, on s'attend à avoir 3 invariants. Ces invariants sont les longueurs et les angles, ou leurs avatars algébriques : produits et carrés scalaires. *A priori*, il y a 4 invariants : les carrés scalaires $(a|a)$ et $(b|b)$ et les produits scalaires $(a|b)$ et $(b|a)$. Bien entendu, dans ce cas, il y a une relation évidente : la symétrie du produit scalaire $(a|b) = (b|a)$.

39. Pour une discussion sur l'intérêt didactique des cas d'isométrie, abandonnés depuis plus de trente ans dans l'enseignement de la géométrie au collège, voir par exemple la rubrique *Sur la géométrie* de ma page web : <http://www.math.u-psud.fr/~perrin/>.

Si l'on considère l'opération du groupe $O^+(q)$ des seules rotations, on voit surgir de nouveaux invariants : les déterminants $[a, b]$ et $[b, a]$: $[a, b] = a_1b_2 - a_2b_1$ (on peut les comprendre aussi comme des produits vectoriels, voire des aires). Comme $O^+(q)$ est encore de dimension 1 il doit donc y avoir deux relations supplémentaires. L'une est évidente, c'est l'antisymétrie du déterminant $[b, a] = -[a, b]$. L'autre est plus intéressante, il s'agit de la relation dite de Lagrange :

$$(a|b)^2 + [a, b]^2 = (a|a)(b|b),$$

qui n'est autre que la formule bien connue $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$.

Exemple 2 : le groupe des isométries et les triangles

Le groupe des isométries du plan affine euclidien est de dimension 3. Dans son action sur l'espace des triangles abc , on a repéré des invariants : longueurs et angles. Il y a naturellement six invariants de ce type : les trois longueurs bc, ca, ab et les trois angles $\widehat{a}, \widehat{b}, \widehat{c}$ et on a ainsi un système plus que complet d'invariants. Dans ce cas X/G est de dimension 3 et Y de dimension 6. Il y a donc des relations entre les invariants. Elles sont à la fois bien connues et fondamentales :

- La somme des angles : $\widehat{a} + \widehat{b} + \widehat{c} = \pi$.
- les trois relations d'Al-Kashi du type $bc^2 = ab^2 + ac^2 - 2ab \cdot ac \cos \widehat{a}$.

On notera que, comme on a $\dim Y - \dim(X/G) = 3$, on s'attendrait à trouver trois relations seulement. Le fait qu'il y en ait quatre est la preuve qu'elles ne sont pas indépendantes⁴⁰. Il y a donc des relations entre les relations⁴¹ !

Relations et théorèmes

Une citation de Bourbaki

L'importance des relations entre invariants ne tient pas seulement à leur usage pour la description des quotients X/G . En effet, ce sont elles aussi qui fournissent les théorèmes de la géométrie. L'un des points de départ de mon intérêt pour la théorie des invariants est d'ailleurs la lecture, dans les *Éléments d'histoire des mathématiques* de Bourbaki (cf. [Bou60]), de la phrase suivante :

40. On montre facilement le résultat sur la somme des angles à partir des autres.

41. Un théorème de Hilbert assure tout de même que cette chaîne de relations finit par s'arrêter.

Mais la situation devient bien plus nette avec les progrès de la théorie des invariants qui parvient enfin à formuler des méthodes générales permettant en principe d'écrire tous les covariants algébriques et toutes leurs "syzygies"⁴² de façon purement automatique ; victoire qui, du même coup, marque la mort, comme champ de recherches, de la théorie classique des invariants elle-même et de la géométrie "élémentaire", qui en est devenue pratiquement un simple dictionnaire.

Sans doute, rien ne permet de prévoir a priori, parmi l'infinité de théorèmes que l'on peut ainsi dérouler à volonté, quels seront ceux dont l'énoncé, dans un langage géométrique approprié, aura une simplicité et une élégance comparables aux résultats classiques, et il reste là un domaine restreint où continuent à s'exercer avec bonheur de nombreux amateurs (géométrie du triangle, du tétraèdre, des courbes et surfaces algébriques de bas degré, etc.) Mais pour le mathématicien professionnel, la mine est tarie ...

Cette phrase⁴³ a joué un rôle considérable dans ma quête des liens qui unissent la géométrie et l'algèbre.

Un exemple

Les chapitres 3 et 4 de la Partie II de ce livre sont consacrés à expliquer le sens de cette phrase et le lien entre les relations et les théorèmes projectifs ou affines (Pappus, Desargues, Thalès, les lemmes des proportions, du trapèze, du chevron). C'est une amorce de réalisation du rêve de Leibniz évoqué plus haut. On discutera plus profondément de la nature des relations sous-jacentes à ces théorèmes. On verra que certains (Pappus, Desargues) correspondent à des relations triviales. Il y a là une justice immanente : on sait depuis Artin que ces théorèmes correspondent à des propriétés du corps (commutativité, associativité), de sorte qu'avec notre entrée par les espaces vectoriels, ils sont constitutifs de nos géométries. C'est la métaphore du ver dans le fruit.

On verra que d'autres résultats, projectifs ou affines, sont plus profonds dans la mesure où les relations qui les sous-tendent sont non banales. En particulier, un résultat se dégage comme essentiel, à la fois dans notre pratique géométrique et par sa place parmi les relations fondamentales, il s'agit du théorème qui assure la conservation du birapport par les perspectives.

En attendant, et pour allécher le lecteur, voici un exemple très simple.

Soit abc un triangle du plan euclidien. On choisit une origine o . La relation

42. C'est le mot savant pour relations.

43. Je ne m'associe pas au mépris que j'y sens poindre à l'égard des "géomètres amateurs".

de symétrie (et la linéarité) du produit scalaire donnent la relation :

$$(\vec{ob} - \vec{oc}|\vec{oa}) + (\vec{oc} - \vec{oa}|\vec{ob}) + (\vec{oa} - \vec{ob}|\vec{oc}) = 0.$$

qui fournit aussitôt le concours des hauteurs du triangle. En effet, si l'on choisit pour o l'intersection des hauteurs issues de a et b , les deux premiers produits scalaires sont nuls (par exemple, le premier n'est autre que $(\vec{cb}|\vec{oa})$ par la relation de Chasles), donc aussi le troisième, et o est sur la troisième hauteur.

Détermination des invariants et des relations

Le plus fascinant peut-être, dans la théorie des invariants, c'est le résultat final : pour les groupes "classiques", **tous** les invariants et **toutes** les relations sont connus. C'est ce qui justifie la phrase de Bourbaki citée plus haut et c'est l'un des objectifs de ce livre qui sera obtenu dans la Partie II pour la géométrie projective, dans la Partie IV pour les géométries non euclidiennes et dans la Partie V pour la géométrie euclidienne. Ces résultats sont anciens, mais les textes qui les évoquent ne sont pas toujours faciles (voir par exemple le livre [Wey39], d'une richesse extraordinaire, mais terriblement compact) et nous avons tenté d'en donner des preuves souvent plus détaillées et parfois plus précises.

Les invariants

Il est bien naturel d'imposer aux invariants de dépendre des données, (points, droites, vecteurs, etc.) de manière "régulière". Dans le cas où le corps de base est $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$, ce mot peut avoir le sens de continu, voire différentiable, mais sur un corps quelconque, les seules fonctions régulières dignes de ce nom sur les espaces projectifs sont les fonctions rationnelles. La recherche des invariants de transitivité va donc peu ou prou se ramener à la recherche algébrique des invariants rationnels sous l'action des groupes du type $PGL(E)$ ou $PO(q)$. On est tout proche d'un problème classique de théorie des représentations, qui consiste à chercher les invariants polynomiaux de ces groupes. Dans ce cadre, on montre, voir Partie II et Partie IV, que les seuls invariants (dans le cas d'un espace E de dimension 3) sont les crochets $[a, b, c]$ (le déterminant de ces trois vecteurs, dans le cas linéaire) ou les valeurs $q(a)$ ou $\varphi(a, b)$ de la forme quadratique ou de sa forme polaire (dans le cas métrique).

Attention toutefois, même si elles sont proches, les opérations des groupes sur E et sur $\mathbf{P}(E)$ ne sont pas équivalentes et les invariants polynomiaux

“ne passent pas au quotient”, c’est-à-dire n’ont pas de sens en projectif. En effet, si l’on multiplie par exemple le vecteur a par un scalaire, ce qui ne change pas le point du projectif puisque les coordonnées y sont homogènes, les invariants $[a, b, c]$ ou $q(a)$ changent. Pour obtenir des invariants projectifs, il faut utiliser des invariants rationnels, quotients des invariants polynomiaux. On verra qu’on trouve ainsi le birapport :

$$\llbracket (xa), (xb), (xc), (xd) \rrbracket = \frac{[x, a, c] \times [x, b, d]}{[x, b, c] \times [x, a, d]}.$$

ou encore l’invariant “anallagmatique” $I(a, b) = \frac{\varphi(a, b)^2}{q(a)q(b)}$.

Comme conséquence des résultats vectoriels, on obtient que le seul invariant de la géométrie projective plane est le birapport $\llbracket (xa), (xb), (xc), (xd) \rrbracket$ défini ci-dessus.

Les relations

Pour les invariants du groupe linéaire, c’est-à-dire les crochets, on montre que l’idéal des relations est engendré par les relations du type suivant :

$$(\mathcal{R}) \quad [b, c, d][a, x, y] - [a, c, d][b, x, y] + [a, b, d][c, x, y] - [a, b, c][d, x, y] = 0.$$

Si l’on en croit Bourbaki, la relation $\mathcal{R}$ ci-dessus, qui engendre toutes les autres relations, donc tous les théorèmes, doit apparaître comme la relation fondamentale de la géométrie plane. C’est bien le cas, et à un double titre :

- D’abord, nous verrons que cette relation traduit la propriété essentielle du plan, qui est d’être de dimension 2.
- Ensuite, cette relation, a pour sous-produit l’égalité des birapports :

$$\llbracket (xa), (xb), (xc), (xd) \rrbracket = \llbracket (ya), (yb), (yc), (yd) \rrbracket$$

dans la figure ci-dessous :

Cette égalité de birapports, ou plutôt sa duale, signifie que les perspectives conservent le birapport et nous verrons, tout au long de la Partie I que c’est bien là un outil essentiel.

La dualité

Le mot vient d’être lâché : la dualité est, en géométrie projective, une autre notion fondamentale, une de celles qui justifient l’approche vectorielle. C’est l’un des fils conducteurs de ce livre et peut-être l’une de ses originalités :

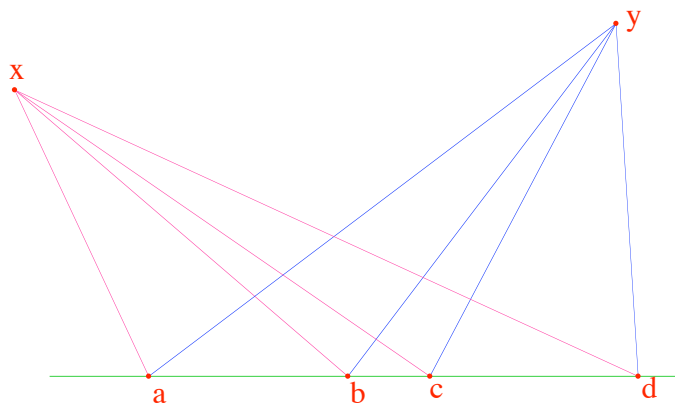


FIGURE 5 – Birapports et pinceaux

nous avons essayé de pousser le plus loin possible l'usage de ce concept. C'est facile en géométrie projective plane. En effet, comme on travaille dans le plan, il n'y a que deux types d'objets, points et droites et ils sont échangés par une dualité qui traduit celle de E et E^* . Cela permet de passer instantanément de propriétés d'alignement à des propriétés de concours et inversement ou de propriétés des points des coniques aux propriétés des tangentes (voir par exemple les théorèmes de Pascal et Brianchon). Cette dualité marche parfaitement en géométrie projective linéaire⁴⁴. Elle fonctionne aussi à merveille et sans la moindre restriction en géométrie elliptique.

Ce qui est moins connu c'est qu'elle fonctionne aussi très bien en géométrie hyperbolique. Il convient pour cela, et c'est l'apport de ce livre par rapport aux textes usuels, de travailler non seulement dans le plan de Klein (par exemple), mais aussi à l'extérieur du disque frontière. On verra notamment trois exemples essentiels qui illustrent la force de ces conceptions :

- Cette vision des choses permet de comprendre certains phénomènes qui sans cela demeurent mystérieux. On a ainsi l'explication du fait qu'on rencontre habituellement deux types de situation pour les hauteurs d'un triangle hyperbolique : elles peuvent être concourantes ou avoir une perpendiculaire commune. En fait, dans le plan projectif entier elles sont toujours concourantes, mais si le point de concours est extérieur c'est sa polaire qui est la perpendiculaire commune.

- Elle permet de prouver d'un trait de plume des résultats en apparence

44. À tel point que Chasles finirait presque par regretter que la géométrie soit devenue trop facile, voir Partie I, Chapitre 2 la citation exacte après le théorème de Brianchon.

différents. Ainsi, le concours des médiatrices et celui des bissectrices sont un seul et même théorème, le premier se lisant dans E et le second dans E^* .

- Enfin, elle fournit parfois de nouveaux concepts, ainsi, celui de point bissecteur de deux droites, dual de la notion de médiatrice de deux points.

En revanche, la notion de dualité est presque inexistante en euclidien et l'entrée que nous avons choisie à la Partie V le montre bien. En effet, dans ce cas les espaces E et E^* ne jouent pas des rôles symétriques : la donnée est celle d'une forme q^* sur E^* et cette forme étant dégénérée ne donne pas une forme sur E tout entier. C'est une différence fondamentale entre le cas euclidien et les autres.

Principes didactiques de ce livre

On a souhaité garder à ce livre un caractère relativement élémentaire, pour qu'un étudiant de master de mathématiques puisse le lire sans se heurter à de trop grandes difficultés. Cela n'empêche pas d'aborder parfois des choses plus compliquées (dualité, produit extérieur, idéaux, caractères), mais dans ce cas les rappels nécessaires sont proposés.

On a voulu que ce livre soit avant tout un livre de géométrie, avec tout ce qu'elle comporte de visuel et de beau. Cela explique la profusion des figures⁴⁵ mais cela n'empêche pas que le texte est adossé à un support algébrique solide, avec parfois des renvois d'ascenseur : la géométrie peut aussi donner de l'algèbre (voir le théorème de Cartan-Dieudonné, le lien entre les points de Frégier et la norme spinorielle, le calcul de $\text{Aut } O(q)$...)

Même si nous proposons de nouvelles lectures de la géométrie, nous avons essayé de retrouver les notions et résultats des anciens. Le lecteur y trouvera ou y retrouvera le théorème de Pappus et celui de Desargues, la division harmonique et les polaires, les théorèmes de Ménélaüs, Céva, Newton et Gergonne, le théorème de Desargues sur les pinceaux de coniques, le théorème de Pascal, les points de Frégier, les points de Gergonne ou de Nagel, le concours des droites remarquables du triangle, le triangle orthique, le théorème de Feuerbach, la droite de Simson, etc.

Les choix de rédaction restent marqués par la formation de l'auteur qui n'a pas renié totalement Bourbaki, notamment parce qu'il reconnaît en Jean-Pierre Serre son maître absolu. Cela sous-entend un effort pour arriver aux résultats avec une économie de moyens (voir par exemple le début de I 2 avec les perspectives). Tout de même, on espère qu'une expérience de plus

45. Les figures sont réalisées avec le logiciel *Cabri géomètre*.

de 40 ans d'enseignement aura permis à l'auteur de surmonter quelques-uns des défauts de son illustre prédécesseur.

Le calcul joue un rôle important dans ce livre et là encore, l'esthétique a été l'un de nos guides. Il y a de belles formules comme il y a de belles figures et ce sont souvent les mêmes : voir les exemples de Pappus et Desargues. Là encore, s'il fallait formaliser ce qu'on entend par là, on pourrait mettre en avant les mots de simplicité et d'élégance et ils seraient souvent liés à des propriétés d'invariance, par permutation, par un groupe, etc.

Enfin, on a tenu à proposer au lecteur de nombreux exercices parce qu'il n'y a de vraies mathématiques que celles que l'on a comprises par soi-même.

Depuis que ce texte est sur ma page web, un certain nombre de collègues m'ont fait part de leurs remarques et je les en remercie vivement. Il s'agit ⁴⁶ de Charles Delorme, Marie-Claude David, Robin Hartshorne, Jean-Pierre Kahane, Sylvie Ruet, Vincent Feuvrier, Bernard Prum, Lionel Bérard-Bergery, Nicolas de Saxcé.

46. Ceux que j'ai oubliés peuvent m'envoyer une lettre d'injures.

Bibliographie

- [Art62] Emil Artin. *Algèbre géométrique*. Gauthier-Villars, Paris, 1962.
- [Bac59] Friedrich Bachmann. *Aufbau der Geometrie aus dem Spiegelungsbegriff*. Springer Verlag, 1959.
- [Bou60] Nicolas Bourbaki. *Éléments d'histoire des mathématiques*. Hermann, 1960.
- [CF95] Annie Cousin-Fauconnet. *Enseigner la géométrie au collège*. Armand Colin, 1995.
- [Die70] Jean Dieudonné. *La géométrie des groupes classiques*. Springer, Berlin, 1970.
- [dpJPK02] (dirigé par) Jean-Pierre Kahane. *L'enseignement des sciences mathématiques*. Odile Jacob, Paris, 2002.
- [Euc78] Euclide. *Les éléments (traduction Kayas)*. Éditions du CNRS, 1978.
- [Hal76] Marshall Hall. *The theory of groups*. AMS, Providence, 1976.
- [Har00] Robin Hartshorne. *Geometry : Euclide and beyond*. Springer, Berlin, 2000.
- [JCD01] Jean-Pierre Richeton Jean-Claude Duperret, Daniel Perrin. Une illustration du rapport sur la géométrie de la commission kahane : analyse de quelques exercices de géométrie. *Bull. APMEP* 425, 2001.
- [Kle74] Felix Klein. *Le programme d'Erlangen*. Jacques Gabay, 1974.
- [Lio01] Georges Lion. *Géométrie du plan*. Vuibert, 2001.
- [Mar02] Yves Martin. *Conception et mise en oeuvre de micromondes de géométries non-euclidienne dans le cadre de la géométrie dynamique, illustrées avec Cabri-géomètre. Expérimentation en formation des maîtres*. PhD thesis, Université de Grenoble, 2002.
- [Mum65] David Mumford. *Geometric invariant theory*. Springer, Berlin, 1965.

- [Per95] Daniel Perrin. *Géométrie algébrique, une introduction*. Interéditions, Paris, 1995.
- [Per96] Daniel Perrin. *Cours d'algèbre*. Ellipses, Paris, 1996.
- [Per05] Daniel Perrin. *Mathématiques d'École*. Cassini, Paris, 2005.
- [Per08] Daniel Perrin. Géométrie : deux ou trois choses que je sais d'elle. Page web de Daniel Perrin, 2008.
- [Per50] Daniel Perrin. *Une axiomatique pour la géométrie du collège*. ??, 2050.
- [Wey39] Hermann Weyl. *The Classical Groups : Their Invariants and Representations*. Princeton Math. Series, Princeton, 1939.

Le plan prévu de ce livre

Pour allécher le lecteur, nous donnons ci-dessous un aperçu de l'ensemble du projet. Bien entendu, ces prévisions sont sujettes à caution. En particulier, le signe @ indique une plus grande incertitude.

Partie I : Géométrie projective linéaire

Introduction historique (5p.)

Chapitre 1 : L'espace projectif et ses sous-espaces (21 p.)

Chapitre 2 : La géométrie des droites du plan (13 p.)

Chapitre 3 : Le birapport (25 p.)

Chapitre 4 : Le théorème fondamental de la géométrie projective (13 p.)

Partie II : Les invariants de la géométrie projective linéaire

Introduction historique (4p.)

Chapitre 1 : Préliminaires (21 p.)

Chapitre 2 : Propriétés, constructions et théorèmes projectifs (42 p.)

Chapitre 3 : Énoncé des théorèmes fondamentaux (18 p.)

Chapitre 4 : Retour à la géométrie, 1 : la géométrie projective (17 p.)

Chapitre 5 : Retour à la géométrie, 2 : la géométrie affine (29 p.)

Chapitre 6 : Preuve des théorèmes fondamentaux (25 p.)

Chapitre 7 : Opérations, invariants et quotients : quelques exemples (74 p.)

Partie III : La géométrie d'une forme quadratique, premier épisode : la conique

Introduction historique (3p.)

Chapitre 1 : Rappels sur les formes quadratiques (10 p.)

Chapitre 2 : Les coniques du plan projectif : généralités (25 p.)

Chapitre 3 : La conique vue comme une droite projective (52 p.)

Chapitre 4 : L'espace des coniques (53 p.)

Partie IV : La géométrie d'une forme quadratique, deuxième épisode : les géométries non euclidiennes

Introduction historique (@p.)

Chapitre 1 : Présentation des géométries non euclidiennes (33 p.)

Chapitre 2 : Les différents modèles des géométries non euclidiennes (30 p.)

Chapitre 3 : Les droites remarquables du triangle (26 p.)

Chapitre 4 : Propriétés de transitivité : le cas d'un corps quelconque (30 p.)

Chapitre 5 : Longueurs et angles : le cas des géométries réelles (23 p.)

Chapitre 6 : L'espace des triangles dans les géométries réelles (29 p.)

Chapitre 7 : Cercles, équidistantes et horicycles (23 p.)

Chapitre 8 : Transformations de la droite ou du point, vecteurs, angles orientés, etc.(31 p.)

Chapitre 9 : Invariants des géométries non euclidiennes (@24 p.)

Partie V : La géométrie d'une forme quadratique, troisième épisode : la géométrie euclidienne

Introduction historique (@p.)

Chapitre 1 : Le cas dégénéré : présentation (20 p.)

Chapitre 2 : Les groupes d'isométries (20 p.)

Chapitre 3 : Les droites remarquables du triangle (13 p.)

Chapitre 4 : Transitivité, invariants, cas d'isométrie et de similitude (17 p.)

Chapitre 5 : Les invariants du groupe des similitudes (@ 15 p.)

Partie VI : La géométrie anallagmatique

Introduction historique (@p.)

Chapitre 1 : Rappels sur l'inversion (@ 10 p.)

Chapitre 2 : La droite projective complexe (@ 9 p.)

Chapitre 3 : L'espace des cercles et des droites (@ 18 p.)

Postface : L'enseignement de la géométrie