

**Corrigé BG 2011**  
**Problème I**

|             | <b>Correction</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              | <b>Barème</b>                |
|-------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------|
| <b>I.1.</b> | <ul style="list-style-type: none"> <li>Equation d'Euler d'un fluide parfait en absence de forces volumiques :<br/> <math display="block">\rho \left[ \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{v} \right] = -\overrightarrow{\text{grad}} P</math></li> <li>Equation de conservation de la masse<br/> <math display="block">\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial v}{\partial x} = 0</math></li> </ul>                                                                          | 0.5<br><br>0.5               |
| <b>I.2.</b> | <p>Dans le cadre de l'approximation acoustique, on néglige les termes d'ordre supérieur ou égal à deux :</p> <p><math> p(x, t)  \ll P_0 ;  \mu(x, t)  \ll \rho_0 ; v \ll c</math></p> <p>Les équations d'Euler et de conservation de la masse s'écrivent dans le cadre de l'approximation acoustique, de la forme :</p> $\rho_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\overrightarrow{\text{grad}} p \quad (1)$ $\frac{\partial \mu}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad (2)$                                        | 0.25<br><br>0.25<br><br>0.25 |
| <b>I.3.</b> | <p>Pour une propagation unidimensionnelle dans la direction (Ox),</p> $\rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial P}{\partial x}$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  | 0.5                          |
| <b>I.4.</b> | <p>D'où :</p> $\chi_s = \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \rho}{\partial P} \right)_s \approx \frac{1}{\rho} \frac{\rho - \rho_0}{P - P_0} \approx \frac{1}{\rho_0} \frac{\mu}{p}$ $\mu(x, t) = \rho_0 \chi_s p(x, t)$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      | 0.5                          |
| <b>I.5.</b> | <p>D'après les équations (I.3) et (I.4) on a :</p> $\rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad (I)$ $\frac{\partial \mu}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad (II)$ $\mu \approx \rho_0 \chi_s p \quad (III)$ $\frac{\partial (I)}{\partial x} - \frac{\partial (II)}{\partial t} \Rightarrow \rho_0 \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \mu}{\partial t^2} - \rho_0 \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t} = 0$ | 0.5                          |

|      |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |                                    |
|------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------|
|      | $\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \mu}{\partial t^2} = 0$ $\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \rho_0 \chi_S \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0$ <p>En posant : <math>c^2 = \frac{1}{\rho_0 \chi_S}</math>, on obtient :</p> $\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0$ <p>Où : <math>c = \frac{1}{\sqrt{\rho_0 \chi_S}}</math> est la vitesse de propagation du son dans le fluide.</p> <p>En faisant :</p> $\frac{\partial(I)}{\partial t} - \frac{1}{\rho_0 \chi_S} \frac{\partial(II)}{\partial x}$ <p>On obtient :</p> $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0$ <p>Les équations vérifiées par <math>p(x, t)</math> et <math>v(x, t)</math> sont du type <u>équation de d'Alembert</u>.</p> | <p>0.25</p> <p>0.5</p> <p>0.25</p> |
| I.6. | <p>Les solutions <math>p(x, t)</math> et <math>v(x, t)</math> des équations de propagation précédentes s'écrivent de la forme :</p> $p(x, t) = \underbrace{f_1\left(t - \frac{x}{c}\right)}_{\substack{\text{Onde progressive} \\ \text{Vers } x > 0}} + \underbrace{f_2\left(t + \frac{x}{c}\right)}_{\substack{\text{Onde progressive} \\ \text{Vers } x < 0}}$ $v(x, t) = g_1\left(t - \frac{x}{c}\right) + g_2\left(t + \frac{x}{c}\right)$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         | 0.5                                |
| I.7. | <p>Dans le cas d'un gaz parfait, l'équation d'état d'un gaz parfait est :</p> $PV = nRT = \frac{m}{M} RT$ $P = \rho_0 \frac{RT}{M}$ <p>L'évolution étant isentropique, on peut alors appliquer la loi de Laplace :</p> $PV^\gamma = cte \Leftrightarrow \frac{P}{\rho^\gamma} = cte$ <p>En différentiant :</p> $\frac{dP}{P} = \gamma \frac{d\rho}{\rho}$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               | 0.75                               |

Ainsi :

$$\frac{d\rho}{dP} = \frac{\rho}{\gamma P} \approx \frac{\rho_0}{\gamma P}$$

$$\chi_s = \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \rho}{\partial P} \right)_s \approx \frac{1}{\rho_0} \frac{\rho_0}{\gamma P} \approx \frac{1}{\gamma P} = \frac{1}{\gamma} \frac{M}{\rho_0 RT}$$

$$c^2 = \frac{1}{\rho_0 \chi_s} = \frac{1}{\rho_0} \frac{\rho_0 RT \gamma}{M} = \frac{\gamma RT}{M}$$

$$c = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}}$$

Application numérique :  $c = 345,7 \text{ m.s}^{-1}$

0,25

## II- Propagation des ondes planes progressive monochromatique :

$$p(x, t) = p_0 e^{j(\omega t - kx)}$$

$$v(x, t) = v_0 e^{j(\omega t - kx)}$$

II.1.1.

$$p(x, t) = p_0 e^{j(\omega t - kx)}$$

En injectant cette solution dans l'équation de propagation :

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0$$

$$-k^2 \underline{p} + \frac{\omega^2}{c^2} \underline{p} = 0$$

$$\left( -k^2 + \frac{\omega^2}{c^2} \right) \underline{p} = 0$$

$$-k^2 + \frac{\omega^2}{c^2} = 0$$

$$k = \frac{\omega}{c}$$

0.5

II.1.2.

$$\lambda = \frac{c}{f}$$

$$c = 345,7 \text{ m.s}^{-1} \text{ et } f = 3 \text{ MHz} \quad \underline{\text{A.N.}} : \lambda = 0,115 \text{ mm}$$

0.25

II.2.1.

On a :

$$\rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0$$

$$\rho_0 (j\omega) \underline{v} - jk \underline{p} = 0$$

$$\underline{v} = \frac{k}{\rho_0 \omega} \underline{p} = \frac{1}{\rho_0 c} \underline{p}$$

$$\underline{Z_c} = \frac{\underline{p}}{\underline{v}} = \rho_0 c$$

0.5

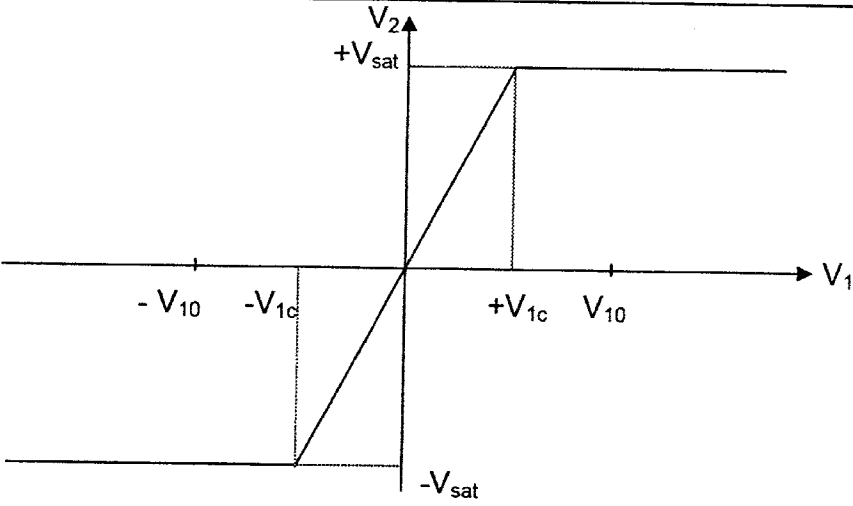
|                                                                                                                                                   |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |                              |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------|
|                                                                                                                                                   | $Z_c =  Z_c  = \rho_0 c$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |                              |
| II.2.2.                                                                                                                                           | <p>Dans le cas d'une propagation vers <math>x &lt; 0</math> :</p> $p(x, t) = p_0 e^{j(\omega t + kx)}$ $v(x, t) = v_0 e^{j(\omega t + kx)}$ <p>Donc :</p> $Z_c = -\rho_0 c$                                                                                                                                                                                                                                                | 0.25                         |
| II.2.3.                                                                                                                                           | <p>Dans le cas de l'air :</p> $c = 345,7 \text{ m.s}^{-1}$ $\rho_0 = 1,3 \text{ Kg.m}^{-3}$ $Z_c = 449,41 \text{ Kg.m}^{-2}.\text{s}^{-1}$                                                                                                                                                                                                                                                                                 | 0.25                         |
| <b>III. Réflexion et transmission d'une onde acoustique :</b> $p_i(x, t) = p_0 \cos(\omega t - k_1 x)$ $\vec{k}_1 = \frac{\omega}{c_1} \vec{U}_x$ |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |                              |
| III.1.                                                                                                                                            | <ul style="list-style-type: none"> <li>Pour l'onde réfléchi :</li> </ul> $\vec{k}_r = -\frac{\omega}{c_1} \vec{U}_x = -\vec{k}_1$ $p_r(x, t) = p_{0r} \cos(\omega t - k_r x) = p_{0r} \cos(\omega t + k_1 x)$ <ul style="list-style-type: none"> <li>Pour l'onde transmise :</li> </ul> $\vec{k}_t = \frac{\omega}{c_2} \vec{U}_x = \vec{k}_2$ $p_t(x, t) = p_{0t} \cos(\omega t - k_t x) = p_{0t} \cos(\omega t - k_2 x)$ | 0.25<br>0.25<br>0.25<br>0.25 |
| III.2.                                                                                                                                            | <p>On a :</p> $Z_c = \frac{p}{v} \Leftrightarrow v = \frac{p}{Z_c}$ <p>Ainsi :</p> $v_i(x, t) = \frac{1}{Z_{c1}} p_i(x, t) = \frac{p_0}{\rho_1 c_1} \cos(\omega t - k_1 x)$ $v_r(x, t) = -\frac{1}{Z_{c1}} p_r(x, t) = -\frac{p_{0r}}{\rho_1 c_1} \cos(\omega t + k_1 x)$ $v_t(x, t) = \frac{1}{Z_{c2}} p_t(x, t) = \frac{p_{0t}}{\rho_2 c_2} \cos(\omega t - k_2 x)$                                                      | 0.5<br>0.5<br>0.5            |
| III.3.                                                                                                                                            | <p>A l'interface <math>x = 0</math> séparant les deux milieux (1) et (2), on a :</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>Continuité de la surpression :</li> </ul> $p_1(x = 0, t) = p_2(x = 0, t)$ $p_i(x = 0, t) + p_r(x = 0, t) = p_t(x = 0, t) \quad (1)$                                                                                                                                                            | 0.5                          |

|         |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |      |
|---------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|
|         | <p>- Conservation du débit volumique :</p> $D_{v1}(x=0) = D_{v2}(x=0)$ $v_1(x=0, t) \cdot S = v_2(x=0, t) \cdot S$ $v_i(x=0, t) + v_r(x=0, t) = v_t(x=0, t)$ $\frac{1}{Z_{c1}} [p_i(x=0, t) - p_r(x=0, t)] = \frac{1}{Z_{c2}} p_t(x=0, t)$ $p_i(x=0, t) - p_r(x=0, t) = \frac{Z_{c1}}{Z_{c2}} p_t(x=0, t) \quad (2)$ <p>• (1) + (2) donne :</p> $2p_i(x=0, t) = \left(1 + \frac{Z_{c1}}{Z_{c2}}\right) p_t(x=0, t)$ $\tau_p = \frac{p_t(x=0, t)}{p_i(x=0, t)} = 2 \frac{Z_{c2}}{Z_{c1} + Z_{c2}}$ <p>• (1) - <math>\frac{Z_{c2}}{Z_{c1}}</math> (2) donne :</p> $\left(1 - \frac{Z_{c2}}{Z_{c1}}\right) p_i(x=0, t) + \left(1 + \frac{Z_{c2}}{Z_{c1}}\right) p_r(x=0, t) = 0$ $\frac{Z_{c2} - Z_{c1}}{Z_{c1}} p_i(x=0, t) = \frac{Z_{c1} + Z_{c2}}{+Z_{c2}} p_r(x=0, t)$ $r_p = \frac{p_r(x=0, t)}{p_i(x=0, t)} = \frac{Z_{c2} - Z_{c1}}{Z_{c1} + Z_{c2}}$ | 0,75 |
|         |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            | 0.5  |
|         |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            | 0.5  |
| III.4.1 | <p>• Le coefficient de réflexion en énergie est :</p> $R = \left  \frac{I_r(x=0, t)}{I_i(x=0, t)} \right  = \left  \frac{p_r(x=0, t)}{p_i(x=0, t)} \right ^2 = r_p^2 = \left  \frac{Z_{c2} - Z_{c1}}{Z_{c1} + Z_{c2}} \right ^2$ <p>• Le coefficient de transmission en énergie est</p> $T = \left  \frac{I_t(x=0, t)}{I_i(x=0, t)} \right  = \frac{Z_{c1}}{Z_{c2}} \left  \frac{p_t(x=0, t)}{p_i(x=0, t)} \right ^2 = 4 \frac{Z_{c2} Z_{c1}}{(Z_{c1} + Z_{c2})^2}$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        | 0.5  |
| III.4.2 | $R + T = \left  \frac{Z_{c2} - Z_{c1}}{Z_{c1} + Z_{c2}} \right ^2 + 4 \frac{Z_{c2} Z_{c1}}{(Z_{c1} + Z_{c2})^2}$ $R + T = \frac{Z_{c2}^2 + Z_{c1}^2 - 2Z_{c2}Z_{c1} + 4Z_{c2}Z_{c1}}{(Z_{c1} + Z_{c2})^2} = \frac{(Z_{c1} + Z_{c2})^2}{(Z_{c1} + Z_{c2})^2}$ $R + T = 1$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   | 0.5  |
| III.4.3 | Cette équation traduit la conservation de l'énergie                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        | 0.25 |
| IV.1.   | <p>IV- Application à l'échographie ultrasons :</p> $R_{air/peau} = 0.99$ $R_{peau/graisse} = 0.0064$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       | 0.25 |
|         |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            | 0.25 |

|       |                                                                                                                                                                                                                                                               |      |
|-------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|
| IV.2. | Comme $R_{air/peau} \approx 1$ , les ondes ultrasons sont réfléchies au niveau de la peau, on ne peut, donc, pas les faire pénétrer dans le corps humain.                                                                                                     | 0.25 |
| IV.3. | Pour faire pénétrer des ultrasons dans le corps humain, il faut éviter la présence de couche d'air entre la sonde et la peau, pour cela on utilise un gel dont l'impédance est voisine de celle de la peau pour avoir $R \approx 0$ (adaptation d'impédance). | 0.25 |

### Problème II :

|      |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |                        |
|------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------|
| I.1. | <p>Lorsque l'AOP fonctionne en régime linéaire, on a :</p> $V^+ = V^-$ <p>Or : <math>V^+ = V_1</math></p> $\frac{V_2 - V^-}{R_2} = \frac{V^-}{R_1} \Leftrightarrow V^- = \frac{R_1}{R_1 + R_2} V_2$ <p>D'où :</p> $V_2 = \frac{R_1 + R_2}{R_1} V_1 = G V_1$ <p><math>G</math> étant le gain en tension de l'AOP défini par :</p> $G = \frac{R_1 + R_2}{R_1}$ | <p>0.5</p> <p>0.25</p> |
| I.2. | <p>L'AOP fonctionne en régime linéaire si :</p> $-V_{sat} < V_2 < +V_{sat}$ $-V_{sat} < \frac{R_1 + R_2}{R_1} V_1 < +V_{sat}$ $-\frac{R_1}{R_1 + R_2} V_{sat} < V_1 < +\frac{R_1}{R_1 + R_2} V_{sat}$ $\Rightarrow  V_1  \leq V_{1c} \text{ où } V_{1c} = \frac{R_1}{R_1 + R_2} V_{sat}$                                                                     | <p>0.5</p> <p>0.25</p> |

|        |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |                 |
|--------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------|
| I.3.   |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          | 0.5             |
| II.1.  | <p>D'après la loi des nœuds :</p> $i = C \frac{dV_4}{dt} + \frac{V_4}{R}$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 | 0.25            |
| II. 2. | <p>Loi des mailles :</p> $V_3 = V_4 + Ri + \frac{1}{C} \int i dt$ $\Rightarrow \frac{dV_3}{dt} = \frac{dV_4}{dt} + R \frac{di}{dt} + \frac{i}{C}$ <p>Or :</p> $i = C \frac{dV_4}{dt} + \frac{V_4}{R}$ $\Rightarrow \frac{dV_3}{dt} = \frac{dV_4}{dt} + R \frac{d}{dt} \left( C \frac{dV_4}{dt} + \frac{V_4}{R} \right) + \frac{1}{C} \left( C \frac{dV_4}{dt} + \frac{V_4}{R} \right)$ $\Rightarrow RC \frac{d^2V_4}{dt^2} + 3 \frac{dV_4}{dt} + \frac{1}{RC} V_4 = \frac{dV_3}{dt}$ $\Rightarrow \frac{d^2V_4}{dt^2} + \frac{3}{RC} \frac{dV_4}{dt} + \left( \frac{1}{RC} \right)^2 V_4 = \frac{1}{RC} \frac{dV_3}{dt}$ <p>On pose : <math>\alpha = 3</math>; <math>\omega_0 = \frac{1}{RC}</math>, on a alors :</p> $\frac{d^2V_4}{dt^2} + \alpha \omega_0 \frac{dV_4}{dt} + \omega_0^2 V_4 = \omega_0 \frac{dV_3}{dt}$ | 0.5<br><br>0.25 |
| III.1. | <p>L'AOP étant idéal, le courant <math>i^+ = 0</math>, il y'a pas de courant en provenance de la borne (+). Le résultat précédent reste, alors, valable.</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              | 0.25            |
| III.2. | <p>On a :</p> $V_3 = V_2 \text{ et } V_4 = V_1$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |                 |

|        |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |                                                    |
|--------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------|
|        | <ul style="list-style-type: none"> <li>Si <math> V_1  \leq V_{1c}</math>: <math display="block">V_2 = GV_1 \Rightarrow \frac{d^2V_1}{dt^2} + a\omega_0 \frac{dV_1}{dt} + \omega_0^2 V_1 = \omega_0 G \frac{dV_1}{dt}</math> <math display="block">\Rightarrow \frac{d^2V_1}{dt^2} + \omega_0(a - G) \frac{dV_1}{dt} + \omega_0^2 V_1 = 0</math> <math display="block">\Rightarrow \frac{d^2V_1}{dt^2} + b_1\omega_0 \frac{dV_1}{dt} + \omega_0^2 V_1 = 0 ; b_1 = a - G</math> </li> <li>Si <math> V_1  \geq V_{1c}</math>: <math display="block">V_2 = \pm V_{sat} \Rightarrow \frac{dV_3}{dt} = \frac{dV_2}{dt} = 0</math> <math display="block">\Rightarrow \frac{d^2V_1}{dt^2} + a\omega_0 \frac{dV_1}{dt} + \omega_0^2 V_1 = 0</math> <math display="block">\Rightarrow \frac{d^2V_1}{dt^2} + b_2 \frac{dV_1}{dt} + \omega_0^2 V_1 = 0 ; b_2 = a\omega_0</math> </li> </ul> | 0.5<br><br>0.25<br><br><br><br><br>0.5<br><br>0.25 |
| III.3. | On peut générer des oscillations sinusoïdales pour $b_1 = a - G = 0$ , c'est à dire pour $G = a = 3$ .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          | 0.25                                               |