

Partie I

Le but de cette partie est de calculer les intégrales $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2} dt$ et $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$.

Soit la fonction

$$h(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} \frac{\sin^2 t}{t^2} dt.$$

1. On pose $H(x, t) = e^{-xt} \frac{\sin^2 t}{t^2}$ sur $[0, +\infty[\times]0, +\infty[$.

H est continue sur $[0, +\infty[\times]0, +\infty[$ et on a

$$|H(x, t)| \leq \frac{\sin^2 t}{t^2}, \quad \forall (x, t) \in [0, +\infty[\times]0, +\infty[.$$

De même $\frac{\sin^2 t}{t^2} \sim 1$ au voisinage de 0 et $\frac{\sin^2 t}{t^2} \leq \frac{1}{t^2}$ au voisinage de $+\infty$.

Donc $\phi : t \mapsto \frac{\sin^2 t}{t^2}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$, d'où h est bien définie et continue sur $[0, +\infty[$.

2. (a) La fonction $x \mapsto e^{-xt} \frac{\sin^2 t}{t^2}$ est deux fois dérivable donc la fonction H admet deux dérivées partielles $\frac{\partial H}{\partial x}$ et $\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}$ avec $\frac{\partial H}{\partial x} = -e^{-xt} \frac{\sin^2 t}{t}$ et $\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} = e^{-xt} \sin^2 t$.

Pour $a > 0$ et $x \geq a$, $|\frac{\partial H}{\partial x}(x, t)| = |e^{-xt} \frac{\sin^2 t}{t}| \leq |e^{-at} \frac{\sin^2 t}{t}| = \psi_1(t)$ et $|\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}(x, t)| = |e^{-xt} \sin^2 t| \leq |e^{-at} \sin^2 t| = \psi_2(t)$ avec ψ_1 et ψ_2 sont intégrables sur $]0, +\infty[$. Par domination sur tout compact h est de classe C^2 sur $]0, +\infty[$, et

$$h''(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial^2 H}{\partial x^2}(x, t) dt$$

$$h(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} \frac{\sin^2 t}{t^2} dt$$

$$\begin{aligned} h''(x) &= \int_0^{+\infty} e^{-xt} \sin^2 t dt = \int_0^{+\infty} e^{-xt} \frac{1 - \cos(2t)}{2} dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} e^{-xt} dt - \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} e^{-xt} \cos(2t) dt \\ &= \frac{1}{2x} - \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} e^{-xt} \cos(2t) dt \end{aligned}$$

- (b) Deux intégrations par parties donnent, pour tout $x > 0$,

$$\int_0^{+\infty} e^{-xt} \cos(2t) dt = \frac{x}{x^2 + 4}.$$

- (c) Intégrer $h''(x)$ donne, pour tout $x > 0$,

$$h'(x) = \frac{1}{2} \ln x - \frac{1}{4} \ln(x^2 + 4) + c.$$

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} h'(x) = 0$, nous obtenons $c = 0$.

(d) De même intégrer $h'(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 0$, pour tout $x > 0$,

$$h(x) = \frac{x}{4} \ln \frac{x^2}{x^2 + 4} - \arctan\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{\pi}{2}.$$

(a) h est continue en 0, $\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = h(0)$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2} dt = \frac{\pi}{2}.$$

(b) Intégration par partie sur $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2} dt$.

On pose $u = \sin^2 t$ et $v' = \frac{1}{t^2}$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2} dt = \left[-\frac{\sin^2 t}{t} \right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{\sin(2t)}{t} dt$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin z}{z} dz.$$

avec $z = 2t$.

Partie II

Le but de cette partie est de calculer entre autres les sommes suivantes: $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{\sin n}{n}\right)^2$ e

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n}{n}.$$

1. Soit φ la fonction de la variable réelle t , 2π -périodique et telle que:

$$\forall t \in [-\pi, \pi[, \varphi(t) = \frac{\pi}{2} - |t|.$$

On note $S_\varphi(t)$ la série de Fourier de φ .

(a) φ est 2π périodique et $\forall t \in [-\pi, \pi[, \varphi(t) = \frac{\pi}{2} - |t|$. φ est C^1 par morceaux sur $[-\pi, \pi$
 φ est continue en π^- et en π^+ . $\varphi(\pi^-) = \varphi(\pi^+) = \varphi(\pi)$.

Donc φ est continue sur $[-\pi, \pi]$ et par période sur $\mathbb{R}$. Sur $[0, \pi[$ $\varphi'(x) = -1$ et admet une limite en π^- .

Donc φ est C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$.

En utilisant le théorème de Dirichlet on a $\varphi(t) = S_\varphi(t)$.

(b) Comme φ est paire $b_n(\varphi) = 0$. $a_0(\varphi) = 0$ et

$$a_n(\varphi) = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 2k \\ \frac{4}{\pi(2k-1)^2} & \text{si } n = 2k-1 \end{cases}$$

(c) D'où

$$S_\varphi(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4 \cos((2k-1)t)}{\pi(2k-1)^2}.$$

2. i) $t = 0$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

ii)

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k)^2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

iii)

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}$$

3. i) Théorème de Parseval

$$\frac{a_0(\varphi)}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n^2(\varphi) + b_n^2(\varphi)) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t)^2 dt$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k-1)^4} = \frac{\pi^4}{96}$$

ii)

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k-1)^4} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k)^4}$$

$$= \frac{\pi^4}{90}$$

4. On note $\Phi(x) = \int_0^x \varphi(t) dt$ telle que $\Phi(0) = 0$.

$$(a) \quad \Phi(-x) = \int_0^{-x} \varphi(t) dt = \int_0^x \varphi(-t)(-dt) = -\int_0^x \varphi(t) dt = -\Phi(x) \text{ et}$$

$$\Phi(x+2\pi) = \int_0^{x+2\pi} \varphi(t) dt = \Phi(x) + \int_x^{x+2\pi} \varphi(t) dt$$

φ étant 2π périodique donc

$$\int_x^{x+2\pi} \varphi(t) dt = \int_0^{2\pi} \varphi(t) dt = \pi a_0(\varphi) = 0.$$

. D'où $\Phi(x+2\pi) = \Phi(x)$.

(b) φ étant continue 2π périodique C^1 par morceaux donc la série de Fourier de φ converge normalement vers φ . On a une série de fonctions continues qui converge normalement on peut l'intégrer terme à terme

$$\varphi(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4 \cos((2k-1)t)}{\pi(2k-1)^2}.$$

ce qui donne

$$\Phi(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4 \sin((2k-1)x)}{\pi(2k-1)^3}$$

Cette série converge normalement donc sa somme est développable en série de Fourier. et les coefficients de Fourier de Φ sont $a_n(\Phi) = 0$, $b_{2k}(\Phi) = 0$ et $b_{2k+1}(\Phi) = \frac{4}{\pi(2k-1)^3}$

(c) i) Parseval appliqué à Φ donne

$$\frac{16}{\pi^2} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k-1)^6} = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \Psi^2(t) dt$$

on a $\forall x \in [0, \pi[, \Phi(x) = \int_0^\pi \left(\frac{2}{\pi} - t\right) dt = \frac{2}{\pi}x - \frac{x^2}{2}$. D'où $\int_0^\pi \Psi^2(t) dt = \frac{\pi^5}{120}$ ce qui donne

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k-1)^6} = \frac{\pi^6}{960}$$

ii) De même que 2) ii)

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945}.$$

5. Soit f la fonction d'une variable réelle, 2π -périodique, impaire et telle que, pour tout $t \in]0, \pi]$, on a:

$$f(t) = \frac{\pi - t}{2}.$$

(a) Comme f est impaire on a $f(0) = 0$ et $a_n(f) = 0$, $b_n(f) = \frac{1}{n}$.

(b) $S_f(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nt)}{n}$.

6. f n'est pas continue sur $\mathbb{R}$ mais continue par morceaux $S_f(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nt)}{n} = \frac{f(t^+) + f(t^-)}{2}$

Au point 1 f est continue et $\sum_{n \geq 1} \frac{\sin n}{n}$ est convergente et que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n}{n} = f(1) = \frac{\pi - 1}{2}.$$

7. On considère la fonction g , 2π -périodique, impaire et définie sur $]0, \pi]$ par:

$$g(t) = \begin{cases} tf(1) & \text{si } t \in]0, 1], \\ f(t) & \text{si } t \in [1, \pi]. \end{cases}$$

(a) $a_n(g)$ et $b_n(g)$. La fonction g est 2π périodique sur $\mathbb{R}$ et C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$,
 $a_n(g) = 0$ car g est impaire et $b_n(g) = \frac{\sin(n)}{n^2}$.

(b) d'où

$$S_g(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n)}{n^2} \sin(nt).$$

(c) g étant continue 2π périodique C^1 par morceaux donc la série de Fourier de g converge normalement vers g .

(d) En utilisant Dirichlet et le fait que $g(1) = f(1)$ on obtient

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{\sin n}{n}\right)^2 = \frac{\pi - 1}{2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n}{n}.$$

(e) En utilisant Parseval $\frac{a_0(g)^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n(g)^2 + b_n(g)^2) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g^2(t) dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{\cos n}{n} \right)^2$.

8. Calculer les sommes suivantes:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^2 n}{n^4} = \frac{(\pi - 1)^2}{6}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos^2 n}{n^4} = \frac{\pi^4}{96} - \frac{(\pi - 1)^2}{6}.$$

Partie III

- On note par $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n .
- Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On dit qu'une matrice R de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une racine carrée de A si $R^2 = A$.
- On note par $Rac(A)$ l'ensemble des racines carrées de A .

Le problème propose de déterminer les racines carrées de A dans différents cas.

1. Cas où A possède n valeurs propres distinctes.

On suppose que la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ admet n valeurs propres réelles $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n$.

- (a) • A admet n valeurs propres distinctes donc elle est diagonalisable et semblable à une matrice diagonale. D'où l'existence d'une matrice $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversible telle que $A = PDP^{-1}$ où $D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$.
- Soit R une racine carrée de A et $S = P^{-1}RP$. Comme $R^2 = A \Leftrightarrow S^2 = P^{-1}R^2P = D \Leftrightarrow S^2 = D$.

(b) Racines carrées de D . Soit S une racine carrée de D .

i) $SD = S^3 = DS$. Posons $S = (S_{ij})$. Comme $SD = DS$ on a $\lambda_i S_{ij} = S_{ij} \lambda_j$ et donc pour $i \neq j$, $S_{ij} = 0$ car $\lambda_i \neq \lambda_j$ d'où la matrice S est diagonale.

2i) On a alors $S^2 = \text{diag}(s_1^2, \dots, s_n^2) = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. d'où $\forall i, s_i^2 = \lambda_i$.

3i) Si $\lambda_1 < 0, i = 1, s_1^2 = \lambda_1$ n'a pas de solution donc $Rac(A) = \emptyset$

4i) Si on suppose que toutes les valeurs propres de A sont positives ou nulles alors $\lambda_1 \geq 0 \Rightarrow \lambda_i > 0, \forall i \geq 2$.

Les racines carrées de la matrice D :

$$Rac(D) = \{\text{diag}(\varepsilon_1 \sqrt{\lambda_1}, \dots, \varepsilon_n \sqrt{\lambda_n}), \varepsilon_i \in \{-1, 1\}\}$$

(c) On utilise R racine carrée de A ssi $S = P^{-1}RP$ racine de D .

Si $\lambda_1 < 0$, $Rac(D) = \emptyset \Rightarrow Rac(A) = \emptyset$.

Si $\lambda_1 > 0$ une racine carrée de D est connue par le choix de $\varepsilon_i = 1$ ou -1 ,

$$Rac(A) = \{Pdiag(\varepsilon_1\sqrt{\lambda_1}, \dots, \varepsilon_n\sqrt{\lambda_n})P^{-1}, \varepsilon_i \in \{-1, 1\}\}$$

. Deux choix de ε donneront deux racines carrées distinctes de D sauf dans le où $\lambda_1 = 0$, d'où

$$card(Rac(A)) = 2^{n-1} \text{ si } \lambda_1 = 0$$

$$card(Rac(A)) = 2^n \text{ si } \lambda_1 > 0$$

(d) Application : $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

$$A = \begin{pmatrix} 11 & -5 & 5 \\ -5 & 3 & -3 \\ 5 & -3 & 3 \end{pmatrix}.$$

$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est le vecteur propre associé à la valeur propre 0

$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est le vecteur propre associé à la valeur propre 1

$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est le vecteur propre associé à la valeur propre 16

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$A = Pdiag(0, 1, 16)P^{-1}$, 4 racines carrées de A

$$RacA = \{Pdiag(0, 1, 4)P^{-1}, Pdiag(0, -1, 4)P^{-1}, Pdiag(0, 1, -4)P^{-1}, Pdiag(0, -1, -4)P^{-1}\}$$

$$RacA = \left\{ \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{7}{3} & \frac{-5}{3} & \frac{5}{3} \\ \frac{-5}{3} & \frac{1}{3} & \frac{-1}{3} \\ \frac{5}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{-7}{3} & \frac{5}{3} & \frac{-5}{3} \\ \frac{5}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{-5}{3} & \frac{1}{3} & \frac{-1}{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

2. Cas où A est la matrice nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On cherche dans ce cas à déterminer les racines carrées de la matrice nulle.

Soit $R \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, une racine carrée de la matrice nulle. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dont R est la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$. On note r le rang de f .

(a) $R^2 = 0 \Rightarrow f \circ f = 0$. Donc $y \in \text{Im}f \Rightarrow \exists x \in E / y = f(x)$ d'où $f(y) = f^2(x) = 0 \Rightarrow y \in \ker f$, donc $\text{Im}f \subset \ker f$

Le théorème du rang

$$r + \dim(\ker f) = n,$$

Comme $\dim(\ker f) \geq r$ donc $r \leq \frac{n}{2}$

$$(b) \quad i) \quad \sum_{i=1}^{n-r} \alpha_i e_i + \sum_{i=1}^r \beta_i u_i = 0.$$

En composant par $f \Rightarrow f(e_i) = 0$ et $f(u_i) = e_i$, $\sum_{i=1}^r \beta_i f(u_i) = \sum_{i=1}^r \beta_i e_i = 0, (e_1, \dots, e_r$

est libre $\Rightarrow \beta_i = 0 \forall i$.

$$\sum_{i=1}^{n-r} \alpha_i e_i = 0, (e_1, \dots, e_{n-r}) \text{ est libre } \Rightarrow \alpha_i = 0$$

D'où B libre et $\text{card} B = \dim E \Rightarrow B$ est une base.

2i)

$$M_r = \text{Mat}_B(f) = \begin{pmatrix} 0 & I_r \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(c) $R \in \text{Rac}(A)$ alors soit $R = 0$ soit R semblable à M_r , $R = PM_r P^{-1}, P \in GL_n(\mathbb{R})$

$$\text{Rac}(A) = \{PM_r P^{-1} / P \in GL_n(\mathbb{R}), r \in \mathbb{N}^* \cap [1, \frac{n}{2}]\} \cup \{0\}.$$

(d) Application : $n = 4$, les racines carrées de la matrice nulle sont 0 et les matrice

$$\text{semblables à l'une des deux matrices } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Cas où $A = I_n$ la matrice unité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

(a) Soit R une racine carrée de la matrice unité I_n .

i) $R^2 = I_n \Leftrightarrow R^{-1} = R, R$ est inversible.

2i) $X^2 - 1$ est un polynôme annulateur de R . R est semblable à une matrice diagonale qui ne contient que 1 ou -1 sur la diagonale.

$$R \text{ est semblable à } S_q = \begin{pmatrix} -I_q & 0 \\ 0 & I_{n-q} \end{pmatrix}.$$

(b) $\text{Rac}(I_n) = \{PS_q P^{-1} / P \in GL_n(\mathbb{R}), q \in \{0, \dots, n\}\}.$

4. Cas où A est une matrice symétrique réelle.

Non, prendre par exemple $S = \text{diag}(-1, 0, 1, \dots, n-1)$ une valeur propre négative.