

Concours Physique et Chimie
Correction de l'épreuve de Mathématiques

Exercice

- 1) a) comme $|u_n(x)| = \frac{|\sin(nx)|}{n(n^2-1)} \leq \frac{1}{n(n^2-1)}$ et puisque $\frac{1}{n(n^2-1)} \sim \frac{1}{n^3}$ donc la série $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n(n^2-1)}$ converge normalement sur $\mathbb{R}$ on note $f(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n(n^2-1)}$ sa limite simple sur $\mathbb{R}$, les suites des fonctions u_n sont C^1 sur $\mathbb{R}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u'_n(x) = \frac{\cos(nx)}{(n^2-1)}$ et comme $|u'_n(x)| = \frac{|\cos(nx)|}{(n^2-1)} \leq \frac{1}{(n^2-1)}$ et $\frac{1}{n^2} \sim \frac{1}{n^2}$ donc la série $\sum u'_n$ converge normalement et par suite uniformément sur $\mathbb{R}$ donc f est une fonction C^1 sur $\mathbb{R}$ et on a pour tout $x \in \mathbb{R}$ $f'(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\cos(nx)}{(n^2-1)}$
- b) d'après la question précédente on a $f'(0) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(n^2-1)} = \frac{3}{4}$
- 2) a) on pose $a_n = \frac{n}{n^2-1}$, elle est décroissante et tend vers zéro. de plus si on pose $I = [a, 2\pi - a]$ et $\varphi_n(x) = -\sin(nx)$ on a pour tout $N \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in I$ la majoration suivante $|\sum_{k=2}^N \varphi_k(x)| \leq \frac{1}{\sin(\frac{a}{2})}$ d'o la convergence uniforme de $\sum_{n \geq 2} \frac{-n \sin(nx)}{(n^2-1)}$ sur $[a, 2\pi - a]$ pour tout $a \in]0, \pi[$.
- b) on vient de vérifier que f est C^2 sur $]0, 2\pi[$.
- 3) a) on a $b_n(g) = \frac{1}{n}$ et $a_n(g) = 0$ d'après Dirichlet on a pour tout $x \in \mathbb{R}$ $\tilde{f}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n}$
- b) comme g est continue en $\frac{\pi}{2}$ on a $g(\frac{\pi}{2}) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$
d'après le théorème de Parseval on $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$
- 4) a) pour tout $x \in]0, 2\pi[$ on a $f''(x) + f(x) = \sum_{n \geq 2} \frac{-n \sin(nx)}{(n^2-1)} + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n(n^2-1)} = \sin(x) - g(x) = \Phi(x)$
- b) la solution de l'équation différentiel du second ordre à pour solution $y(x) = \frac{\pi}{2} \cos(x) + \frac{3}{4} \sin(x) - \frac{\pi-x}{2} - \frac{x}{2} \cos(x)$
- c) vue l'unicité de solution on a $f(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n(n^2-1)} = \frac{\pi}{2} \cos(x) + \frac{3}{4} \sin(x) - \frac{\pi-x}{2} - \frac{x}{2} \cos(x)$

Problème

Pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose $F_n(x) = (x^2 - 1)^n$ et on définit la suite de polynômes $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à coefficients réels par :

$$\begin{cases} P_0(x) = 1 \\ P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} F_n^{(n)}(x), \quad \text{pour } n \geq 1 \end{cases}$$

o $F_n^{(k)}$ désigne la dérivée k -ième de la fonction F_n , k étant un entier positif.

Partie I

$$1) P_1(x) = x, P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1) \quad P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$$

$$2) \text{ comme } (x^2 - 1)^n = \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k x^{2n-2k}, \text{ alors } P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k \frac{d^n}{dx^n} (x^{2n-2k}). \text{ Or}$$

$\forall m, p \in \mathbb{N}$ on a :

$$\frac{d^m}{dx^m} (x^p) = \begin{cases} p(p-1) \dots (p-m+1) & \text{si } m \leq p \\ 0 & \text{si } m > p \end{cases}$$

Il en résulte que pour $0 \leq k \leq n$, on obtient

$$\frac{d^n}{dx^n} (x^{2n-2k}) = (2n-2k)(2n-2k-1) \dots (n-2k) x^{n-2k}, \text{ si } n \leq 2n-2k. \text{ Ce qui entraîne que } 2k \leq n, \text{ par suite } k \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor.$$

$$\text{Ainsi } \frac{d^n}{dx^n} (x^{2n-2k}) = \frac{(2n-2k)!}{(n-2k)!} x^{n-2k}, \text{ avec } k \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor.$$

$$\text{D'o } P_n(x) = \sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} \frac{(-1)^k (2n-2k)!}{2^n k! (n-k)! (n-2k)!} x^{n-2k}$$

$$3) \quad \text{a) } P_n \text{ ont pour degré } n \text{ le coefficient dominant est } \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2} = \frac{C_{2n}^n}{2^n}.$$

b) que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$P_n(-x) = \sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} \frac{(-1)^k (2n-2k)!}{2^n k! (n-k)! (n-2k)!} (-x)^{n-2k} = (-1)^n P_n(x)$$

c) Il est clair que $P_{2m+1}(0) = 0$ d'après la question précédente, pour $n = 2m$ d'après l'expression de P_{2m} on a $P_{2m}(0) = \frac{(-1)^m (2m)!}{2^{2m} (m!)^2}$.

Partie II

1) En remarquant que $(x^2 - 1)^n = (x-1)^n (x+1)^n$, on obtient par la formule de Leibniz :

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \sum_{k=0}^n C_n^k \frac{d^k}{dx^k} (x-1)^n \frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}} (x+1)^n.$$

$$\text{Comme } \frac{d^k}{dx^k} (x-1)^n = \frac{n!}{(n-k)!} (x-1)^{n-k} \text{ de même } \frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}} (x+1)^n = \frac{n!}{k!} (x+1)^k.$$

Il en résulte:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(C_n^k)^2}{2^n} (x-1)^k (x+1)^{n-k}$$

2) D'après la question précédente, on peut écrire $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(C_n^k)^2}{2^n} (x-1)^k (x+1)^{n-k} + \frac{1}{2^n} (x+1)^n$. En déduire que $P_n(1) = 1$ et comme $P_n(-1) = (-1)^n P_n(1) = (-1)^n$.

3) Comme on a $P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(C_n^k)^2}{2^n} (x-1)^k (x+1)^{n-k}$, il résulte que $P_n(0) = \sum_{k=0}^n \frac{(C_n^k)^2}{2^n} (-1)^k$ et d'après *Partie I - 3 - b* on a :

$$\sum_{k=0}^n (C_n^k)^2 (-1)^k = 2^n P_n(0) = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 2m + 1 \\ \frac{(-1)^m (2m)!}{(m!)^2} & \text{si } n = 2m \end{cases}$$

4) a) D'après l'expression de $P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(C_n^k)^2}{2^n} (x-1)^k (x+1)^{n-k}$, il est clair que le coefficient

de x^n est $\sum_{k=0}^n \frac{(C_n^k)^2}{2^n}$ d'une part d'autre part d'après la question *Partie I - 3 - a* le

coefficient de x^n est $\frac{C_{2n}^n}{2^n}$ donc $\sum_{k=0}^n (C_n^k)^2 = C_{2n}^n$.

b) Comme $x \in [-1, 1]$, donc $|x-1| \leq 2$ et $|x+1| \leq 2$ on a :

$$|P_n(x)| \leq \sum_{k=0}^n \frac{(C_n^k)^2}{2^n} |x-1|^k |x+1|^{n-k} \leq \sum_{k=0}^n (C_n^k)^2 = C_{2n}^n.$$

Partie III

1) a) F_n est une fonction polynôme admettant 1 et -1 comme racines d'ordre n alors pour tout k un entier tel que $0 \leq k \leq n-1$, on a $F_n^{(k)}(-1) = F_n^{(k)}(1) = 0$.

b) pour tout $n \geq 1$, on a

$$\int_{-1}^1 P_n(t) dt = \int_{-1}^1 \frac{1}{2^n n!} F_n^{(n)}(t) dt = \frac{1}{2^n n!} [F_n^{(n)}(1) - F_n^{(n)}(-1)] = 0.$$

2) a) Soit k un entier tel que $0 \leq k \leq n-1$, après k intégrations par parties on a

$$\int_{-1}^1 t^k P_n(t) dt = \frac{(-1)^k k!}{2^n n!} \int_{-1}^1 F_n^{(n-k)}(t) dt = \frac{(-1)^k k!}{2^n n!} [F_n^{(n-k-1)}(t)]_{-1}^1 = 0.$$

b) pour tout polynôme P de degré strictement inférieur à n , on a :

$$\int_{-1}^1 P(t) P_n(t) dt = 0, \text{ d'après la linéarité de l'intégrale et la question précédente.}$$

3) a) pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$J_0 = 2$ et pour $n \geq 1$, par intégration par partie deux fois,

$$J_n = \int_{-1}^1 (x^2 - 1)^n dx = -\frac{2n}{2n+1} J_{n-1}, \text{ en déduire que } J_n = (-1)^n \frac{2^{2n+1} (n!)^2}{(2n+1)!}.$$

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\int_{-1}^1 t^n P_n(t) dt = \frac{1}{2^n n!} \int_{-1}^1 t^n F_n^{(n)}(t) dt$, par intégration n fois, on trouve :

$$\int_{-1}^1 t^n P_n(t) dt = \frac{(-1)^n}{2^n} \int_{-1}^1 F_n(t) dt = \frac{(-1)^n}{2^n} J_n = \frac{2^{n+1} (n!)^2}{(2n+1)!}$$

- 4) Si $m \neq n$, on peut supposer $m < n$. Dans ce cas $\int_{-1}^1 P_m(t)P_n(t)dt = 0$ d'après *Partie III - 2 - b*.

Si $m = n$, dans ce cas on peut écrire $P_n(t) = \frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}t^n + Q_{n-1}$ avec $\deg(Q_{n-1}) < n$.

$$\int_{-1}^1 P_m(t)P_n(t)dt = \frac{(2n)!}{2^n(n!)^2} \int_{-1}^1 t^n P_n(t)dt + \int_{-1}^1 Q_{n-1}(t)P_n(t)dt = \frac{(2n)!}{2^n(n!)^2} \int_{-1}^1 t^n P_n(t)dt = \frac{2}{2n+1}.$$

$$\text{finalement on a : } \int_{-1}^1 P_m(t)P_n(t)dt = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq n \\ \frac{2}{2n+1} & \text{si } m = n \end{cases}$$

Partie IV

On désigne par $\mathcal{E}$, l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n .

- 1) $\{P_0, P_1, \dots, P_n\}$ est une base de $\mathcal{E}$, car est une famille de cardinal $n+1 = \dim_{\mathbb{R}} \mathcal{E}$ échelonné en degré.

- 2) Puisque $\int_{-1}^1 P_m(t)P_n(t)dt = \frac{2}{2n+1}\delta_{m,n}$, donc pour tout $0 \leq k \leq n$, on a
- $$\frac{2}{2k+1}a_k = \int_{-1}^1 P(t)P_k(t)dt, \text{ par suite } a_k = \frac{2k+1}{2} \int_{-1}^1 P(t)P_k(t)dt.$$

Partie IV

On désigne par $\mathcal{E}$, l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n .

- 1) Montrer que $\{P_0, P_1, \dots, P_n\}$ est une base de $\mathcal{E}$.

- 2) Soit $P = \sum_{j=0}^n a_j P_j$ un élément de $\mathcal{E}$. Montrer que pour tout $0 \leq k \leq n$, on a :

$$a_k = \frac{2k+1}{2} \int_{-1}^1 P(t)P_k(t)dt.$$

- 3) Décomposer sur la base $\{P_0, P_1, \dots, P_n\}$ le polynôme Q défini par : $Q(x) = xP_{n-1}(x)$ pour $n \geq 2$.

- 4) En déduire que les polynômes P_n satisfont à la relation de récurrence :

$$\forall n \geq 2, \quad nP_n(x) - (2n-1)xP_{n-1}(x) + (n-1)P_{n-2}(x) = 0 \quad (1)$$

Partie V

On considère la série entière réelle $\sum_{n \geq 0} P_n(x)t^n$ de la variable t , x étant considéré comme un paramètre réel vérifiant $-1 \leq x \leq 1$.

b)) comme $\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$ est développable en série entière et sa série entière est $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k (2k)!}{2^{2k} (k!)^2} t^{2k}$,

d'autre part $f(t, 0) = \sum_{n \geq 0} P_n(0) t^n$ or $P_{2n+1}(0) = 0$ et $P_{2m}(0) = \frac{(-1)^n (2n)!}{2^{2n} (n!)^2}$ on tire que

$$f(t, 0) = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n (2n)!}{2^{2n} (n!)^2} t^{2n} \text{ et par identification on a } f(t, 0) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}.$$

c) A l'intérieur de son disque de convergence la fonction $f(t, x)$ est indéfiniment dérivable par rapport t et on a $f_t(t, x) = \sum_{n \geq 0} n P_n(x) t^{n-1}$ en identifiant on obtient l'équation désirée.

$$(t^2 - 2xt + 1) f_t(t, x) + (t - x) f(t, x) = 0.$$

d) Par résolution de l'équation différentiel de première ordre en t on obtient $f(t, x) = \frac{1}{\sqrt{t^2 - 2xt + 1}}$.