



Correction du Sujet de Maths (Physique et Chimie) :
Session 2004

Problème 1.

Partie I

Soit $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on désigne par $u_n(\lambda) = \int_0^\pi \text{ch}(\lambda x) \cos(nx) dx$.

1) • Une première intégration par parties

(avec $u(x) = \cos(nx)$ et $v'(x) = \text{ch}(\lambda x)$) donne :

$$u_n(\lambda) = \frac{(-1)^n}{\lambda} \text{sh}(\lambda \pi) + \frac{n}{\lambda} \int_0^\pi \text{sh}(\lambda x) \sin(nx) dx.$$

Une deuxième intégration par parties

(avec $f(x) = \sin(nx)$ et $g'(x) = \text{sh}(\lambda x)$) donne :

$$u_n(\lambda) = \frac{(-1)^n}{\lambda} \text{sh}(\lambda \pi) - \frac{n^2}{\lambda^2} u_n(\lambda).$$

2,5

$$\Rightarrow u_n(\lambda) = \frac{(-1)^n \lambda}{n^2 + \lambda^2} \text{sh}(\lambda \pi).$$

(NB : On pourra aussi calculer $u_n(\lambda)$, en remarquant que

$$u_n(\lambda) = \frac{1}{2} \text{Re} \left(\int_0^\pi e^{(\lambda + in)x} dx + \int_0^\pi e^{(-\lambda + in)x} dx \right).$$

• $\forall \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on a

1

$$|u_n(\lambda)| \leq \frac{|\lambda \text{sh}(\lambda \pi)|}{n^2}.$$

Comme la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ est convergente $\Rightarrow$ la série $\sum_{n \geq 1} u_n(\lambda)$ est absolument convergente et par suite convergente.

2) Pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $D_n(x) = 1 + 2 \sum_{k=1}^n \cos(kx)$.

$$a) \int_0^\pi D_n(x) dx = \int_0^\pi \left(1 + 2 \sum_{k=1}^n \cos(kx) \right) dx = \pi + 2 \sum_{k=1}^n \int_0^\pi \cos(kx) dx.$$

Comme $\int_0^\pi \cos(kx) dx = 0$, $\forall 1 \leq k \leq n$,

1,5

$$\Rightarrow \int_0^\pi D_n(x) dx = \pi.$$

b) • Si $x \in 2\pi\mathbb{Z}$, alors $\forall k \in \{1, 2, \dots, n\}$ on a : $\cos(kx) = 1$.

$$\Rightarrow D_n(x) = 2n + 1.$$

• Si $x \notin 2\pi\mathbb{Z}$, alors

$$\begin{aligned} D_n(x) &= 1 + 2 \operatorname{Re} \left(\sum_{k=1}^n e^{ikx} \right) = 1 + 2 \operatorname{Re} \left(e^{ix} \cdot \frac{1 - e^{inx}}{1 - e^{ix}} \right) \\ &= 1 + 2 \operatorname{Re} \left(e^{i\frac{x}{2}} \cdot \frac{1 - e^{inx}}{e^{-i\frac{x}{2}} - e^{i\frac{x}{2}}} \right) = 1 + \operatorname{Re} \left(e^{i\frac{x}{2}} \cdot \frac{e^{inx} - 1}{i \sin(\frac{x}{2})} \right) \\ &= \frac{\sin(\frac{2n+1}{2}x)}{\sin(\frac{x}{2})}. \end{aligned}$$

3) Comme $\sum_{k=1}^n \cos(kx) = \frac{1}{2}(D_n(x) - 1)$ et $ch(\lambda x) = \varphi(x) + 1$, on obtient

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n u_k(\lambda) &= \sum_{k=1}^n \int_0^\pi ch(\lambda x) \cos(kx) dx \\ &= \int_0^\pi \left(\sum_{k=1}^n \cos(kx) \right) ch(\lambda x) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\pi (D_n(x) - 1)(\varphi(x) + 1) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\pi D_n(x) \varphi(x) dx + \frac{1}{2} \int_0^\pi D_n(x) - \frac{1}{2} \int_0^\pi ch(\lambda x) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\pi D_n(x) \varphi(x) dx + \frac{\pi}{2} - \frac{sh(\lambda\pi)}{2\lambda}. \end{aligned}$$

4) a) Soit $\Phi(x) = \begin{cases} \frac{\varphi(x)}{\sin(\frac{x}{2})}, & \text{si } x \in]0, \pi] \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases}$

① Il est clair que Φ est de classe C^1 sur $]0, \pi]$.

D'autre part comme $\Phi(x) \sim \frac{\lambda^2 \frac{x^2}{2}}{\frac{x}{2}} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \Phi(x) = 0 = \Phi(0)$.

① Donc Φ est continue sur $[0, \pi]$.

$\forall x \in]0, \pi]$, on a

$$\begin{aligned}\Phi'(x) &= \frac{\lambda sh(\lambda x) \sin(\frac{x}{2}) - \frac{1}{2}(ch(\lambda x) - 1) \cos(\frac{x}{2})}{\sin^2(\frac{x}{2})} \\ &= \frac{\lambda sh(\lambda x)}{\sin(\frac{x}{2})} - \frac{(ch(\lambda x) - 1) \cos(\frac{x}{2})}{2 \sin^2(\frac{x}{2})}\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \Phi'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\lambda^2 x}{\frac{x}{2}} \right) - \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\lambda^2 \frac{x^2}{2}}{2(\frac{x}{2})^2} = \lambda^2,$$

il en résulte que Φ est dérivable en 0 et $\Phi'(0) = \lambda^2$.

Par conséquent Φ est de classe C^1 sur $[0, \pi]$.

b) On a $\int_0^\pi \varphi(x) D_n(x) dx = \int_0^\pi \Phi(x) \sin((2n+1)\frac{x}{2}) dx$.

Par intégration par parties (on pose $u(x) = \Phi(x)$ et $v'(x) = \sin((2n+1)\frac{x}{2})$), on obtient :

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \Phi(x) \sin((2n+1)\frac{x}{2}) dx &= \left[\frac{2}{2n+1} \Phi(x) \cos((2n+1)\frac{x}{2}) \right]_0^\pi \\ &\quad - \frac{2}{2n+1} \int_0^\pi \Phi'(x) \cos((2n+1)\frac{x}{2}) dx \\ &= -\frac{2}{2n+1} \int_0^\pi \Phi'(x) \cos((2n+1)\frac{x}{2}) dx.\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*, \left| \int_0^\pi \varphi(x) D_n(x) dx \right| \leq \frac{2}{2n+1} \int_0^\pi |\Phi'(x)| dx \leq \frac{2\pi}{2n+1} M,$$

avec $M = \sup_{x \in [0, \pi]} |\Phi'(x)| < \infty$ (car Φ' est continue sur $[0, \pi]$).

$$\text{Donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^\pi \varphi(x) D_n(x) dx = 0.$$

5) D'après 3) on a

$$\sum_{k=1}^n u_k(\lambda) = \frac{1}{2} \int_0^\pi D_n(x) \varphi(x) dx + \frac{\pi}{2} - \frac{sh(\lambda\pi)}{2\lambda}.$$

Par passage à la limite ($n \rightarrow \infty$) et en tenant compte de 4-b), on trouve pour $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} u_k(\lambda) = \frac{\pi}{2} - \frac{sh(\lambda\pi)}{2\lambda}.$$

D'après 1) il en résulte que : $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k \lambda}{n^2 + \lambda^2} sh(\lambda \pi) = \frac{\pi}{2} - \frac{sh(\lambda \pi)}{2\lambda}$.

Donc $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{n^2 + \lambda^2} = \frac{1}{2\lambda} \left(\frac{\pi}{sh(\lambda \pi)} - \frac{1}{\lambda} \right)$.

6) On pose $S(\lambda) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{n^2 + \lambda^2} = \frac{1}{2\lambda} \left(\frac{\pi}{sh(\lambda \pi)} - \frac{1}{\lambda} \right)$.

• On a : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{9n^2 + 1} = \frac{1}{9} S\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{\frac{\pi}{3}}{2sh(\frac{\pi}{3})} - \frac{1}{2}$.

• On a : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + 4} = S(2) = \frac{1}{4} \left(\frac{\pi}{sh(2\pi)} - \frac{1}{2} \right)$.

Partie II

-A-

Soit $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Notons par (E) l'équation différentielle

$$y''(x) - \lambda^2 y(x) = \frac{1}{2} \quad (E)$$

et par (H) l'équation différentielle homogène associée

$$y''(x) - \lambda^2 y(x) = 0 \quad (H).$$

1) Résolution de l'équation (E).

1^{ère} étape : résolution de l'équation (H).

Comme l'équation caractéristique ($r^2 - \lambda^2 = 0$) admet deux racines réelles distinctes $r_1 = \lambda$ et $r_2 = -\lambda$, on en déduit que la solution générale de (H) est donnée par

$$y_H(x) = Ae^{\lambda x} + Be^{-\lambda x}, \text{ avec } A, B \in \mathbb{R}.$$

Or, $e^{\lambda x} = ch(\lambda x) + sh(\lambda x)$ et $e^{-\lambda x} = ch(\lambda x) - sh(\lambda x)$, alors

$$y_H(x) = (A+B)ch(\lambda x) + (A-B)sh(\lambda x) = \alpha ch(\lambda x) + \beta sh(\lambda x).$$

2^{ème} étape : Il est clair que $y_p(x) = \frac{-1}{2\lambda^2}$, est une solution particulière de (E).

Par conséquent la solution générale de (E) est donnée par

$$y_G(x) = y_H(x) + y_p(x) = \alpha ch(\lambda x) + \beta sh(\lambda x) - \frac{1}{2\lambda^2}, \forall x \in \mathbb{R}.$$

2) On cherche une solution y de (E) vérifiant $\begin{cases} y(x) = y(-x), \forall x \in \mathbb{R} \\ y'(\pi) = \frac{\pi}{2} \end{cases}$

D'après 1) $\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}$ on a

$$\begin{aligned} y(x) &= \alpha \cosh(\lambda x) + \beta \sinh(\lambda x) - \frac{1}{2\lambda^2} \\ &= y(-x) \\ &= \alpha \cosh(\lambda x) - \beta \sinh(\lambda x) - \frac{1}{2\lambda^2} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \beta = 0.$$

$$\text{Donc } y(x) = \alpha \cosh(\lambda x) - \frac{1}{2\lambda^2}$$

$$\text{Comme } y'(\pi) = \frac{\pi}{2}, \text{ alors } \alpha = \frac{\pi}{2\lambda \sinh(\lambda \pi)}.$$

Ainsi la solution cherchée est

$$y(x) = \frac{\pi}{2\lambda \sinh(\lambda \pi)} \cosh(\lambda x) - \frac{1}{2\lambda^2}$$

-B-

1) On considère la fonction φ 2π -périodique définie sur $\mathbb{R}$ et telle que

$$\varphi(x) = x \text{ sur }]-\pi, \pi].$$

La fonction φ est impaire et continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.

Les coefficients de Fourier trigonométriques sont donnés par :

$$\bullet \forall n \in \mathbb{N}, a_n(\varphi) = 0. \text{ (car } \varphi \text{ est impaire)}$$

$$\bullet \forall n \in \mathbb{N}^*, b_n(\varphi) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \varphi(x) \sin(nx) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x \sin(nx) dx$$

Une intégration par parties (avec $u(x) = x$ et $v'(x) = \sin(x)$) nous donne :

$$\begin{aligned} b_n(\varphi) &= \frac{2}{\pi} \left[-\frac{1}{n} x \cos(nx) \right]_0^\pi + \frac{2}{n\pi} \int_0^\pi \cos(nx) dx \\ &= \frac{2(-1)^{n+1}}{n} + 0. \end{aligned}$$

$$\text{D'où } b_n(\varphi) = \frac{2}{n} (-1)^{n+1}.$$

1,5

Comme φ est continue et dérivable sur $]-\pi, \pi[$, le théorème de Dirichlet nous permet de conclure que la série de Fourier de φ (donnée par $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin(nx)$)

converge simplement sur $]-\pi, \pi[$ vers la fonction φ , c'est à dire

$$\forall x \in]-\pi, \pi[, \quad x = 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin(nx).$$

2) Soit ψ la fonction définie sur $\mathbb{R}$, 2π -périodique et telle que

$$\psi(x) = x^2 \text{ sur }]-\pi, \pi].$$

La fonction ψ est paire et continue sur $\mathbb{R}$.

Les coefficients de Fourier trigonométriques sont donnés par :

- $\forall n \in \mathbb{N}^*, b_n(\psi) = 0$, (car ψ est paire)

- $a_0(\psi) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x^2 dx = \frac{2}{3} \pi^2$.

- $\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n(\psi) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x^2 \cos(nx) dx$.

Une intégration par parties (avec $u(x) = x^2$ et $v'(x) = \cos(x)$) nous donne :

$$\begin{aligned} a_n(\psi) &= \frac{2}{\pi} \left[\frac{x^2}{n} \sin(nx) \right]_0^\pi - \frac{4}{n\pi} \int_0^\pi x \sin(nx) dx \\ &= 0 - \frac{2}{n} \left[\frac{2}{n} (-1)^{n+1} \right], \quad (\text{d'après 1}) \end{aligned}$$

2,5

D'où $a_n(\psi) = \frac{4}{n^2} (-1)^n$.

La série de Fourier de ψ en $x \in \mathbb{R}$ est donnée par

$$\frac{a_0(\psi)}{2} + \sum_{n \geq 1} a_n(\psi) \cos(nx) = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos(nx).$$

Comme la fonction ψ est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$, alors le théorème de Dirichlet nous permet de conclure que la série de Fourier de ψ en x converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction ψ , en particulier

1,5

$$\forall x \in [-\pi, \pi], \quad x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos(nx).$$

3) a) Pour $x \in \mathbb{R}$, soient $h(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2(n^2 + \lambda^2)} \cos(nx)$

$$\text{et } f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + \lambda^2} \cos(nx).$$

On pose $w_n(x) = \frac{(-1)^{n+1}}{n^2(n^2 + \lambda^2)} \cos(nx)$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, w_n est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, on a :

$$|w_n(x)| \leq \frac{1}{n^4}.$$

$$|w'_n(x)| = \left| \frac{(-1)^n}{n(n^2 + \lambda^2)} \sin(nx) \right| \leq \frac{1}{n^3}.$$

$$|w''_n(x)| = \left| \frac{(-1)^n}{n^2 + \lambda^2} \cos(nx) \right| \leq \frac{1}{n^2}.$$

Par conséquent les séries de fonctions $\sum_{n \geq 1} w_n(x)$, $\sum_{n \geq 1} w'_n(x)$ et $\sum_{n \geq 1} w''_n(x)$ convergent normalement et donc uniformément sur $\mathbb{R}$.

$\Rightarrow h$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$h''(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} w''_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + \lambda^2} \cos(nx) = f(x).$$

b) Immédiate.

c) $\forall x \in [-\pi, \pi]$, on a

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + \lambda^2} \cos(nx) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \left[\frac{1}{n^2} - \frac{\lambda^2}{n^2(n^2 + \lambda^2)} \right] \cos(nx) \quad (\text{D'après 3-b}) \end{aligned}$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos(nx) - \lambda^2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2(n^2 + \lambda^2)} \cos(nx) \quad (\text{car les deux séries C.S sur } \mathbb{R})$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos(nx) - \lambda^2 h(x) \\ &= \frac{x^2}{4} - \frac{\pi^2}{12} + \lambda^2 h(x) \quad (\text{D'après 2}). \end{aligned}$$

0,1
c,s

4) $\forall x \in \mathbb{R}$ on a $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + \lambda^2} \cos(nx)$.

f est paire de manière évidente.

Comme h est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ (d'après 3-a), alors (d'après 3-c) f est de classe C^2 sur $[-\pi, \pi]$ et $\forall x \in [-\pi, \pi]$ on a :

(2)

$$f'(x) = \frac{x}{2} + \lambda^2 h'(x)$$

et $f''(x) = \frac{1}{2} + \lambda^2 h''(x) = \frac{1}{2} + \lambda^2 f(x)$ (d'après 3-a).

$\Rightarrow f$ est une solution de l'équation différentielle : $y''(x) - \lambda^2 y(x) = \frac{1}{2}$.

(1,5)

De plus $f'(\pi) = \frac{\pi}{2} + \lambda^2 h'(\pi) = \frac{\pi}{2}$ (car $h'(\pi) = 0$).

5) D'après 4) et A-2), on a sur $[-\pi, \pi]$

(2,5)

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + \lambda^2} \cos(nx) = f(x) = \frac{\pi}{2\lambda sh(\lambda\pi)} ch(\lambda x) - \frac{1}{2\lambda^2}.$$

6) D'après ce qui précède, on a pour tout $x \in]-\pi, \pi[$ $f'(x) = \frac{x}{2} + \lambda^2 h'(x)$.

D'autre part, $f'(x) = \frac{\pi sh(\lambda x)}{2sh(\lambda\pi)}$.

$\Rightarrow \forall x \in]-\pi, \pi[$, $\frac{x}{2} + \lambda^2 h'(x) = \frac{\pi sh(\lambda x)}{2sh(\lambda\pi)}$.

En utilisant B-1) et l'expression de $h'(x)$ sous forme d'une série, on trouve

(2,5)

$$\begin{aligned} \frac{\pi sh(\lambda x)}{2sh(\lambda\pi)} &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin(nx) + \lambda^2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n(n^2 + \lambda^2)} \sin(nx) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \left(1 - \frac{\lambda^2}{n^2 + \lambda^2}\right) \sin(nx) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} n}{n^2 + \lambda^2} \sin(nx). \end{aligned}$$

Problème 2.

Partie I

1) a) On a $P_1(X) = X$, $P_2(X) = X^2 - \frac{1}{3}$ et $P_3(X) = X^3 - \frac{3}{5}X$.

b) Par récurrence, on a $P_0 = 1 \Rightarrow \deg(P_0) = 0$.

Supposons que $\deg(P_k) = k$ pour tout $k \leq n-1$.

$$\text{On a } P_n = X^n - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\langle X^n / P_k \rangle}{\|P_k\|^2} P_k = X^n + Q_{n-1},$$

$$\text{avec } Q_{n-1} = - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\langle X^n / P_k \rangle}{\|P_k\|^2} P_k.$$

Comme $\deg(Q_{n-1}) \leq n-1$ (par hypothèse de récurrence), par conséquent $\deg(P_n) = n$.

c) On montre par récurrence : d'après a) cette propriété est vraie pour P_0 et P_1 , supposons qu'elle est vraie jusqu'à l'ordre $(n-1)$: $\forall k \leq n-1$, $P_k(-X) = (-1)^k P_k(X)$.

$$\begin{aligned} P_n(-X) &= (-X)^n - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\langle X^n / P_k \rangle}{\|P_k\|^2} P_k(-X) \\ &= (-1)^n X^n - \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{\langle X^n / P_k \rangle}{\|P_k\|^2} P_k(X). \end{aligned}$$

Or $\forall k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ on a

$$\langle X^n / P_k \rangle = \int_{-1}^1 x^n P_k(x) dx \stackrel{(u=x)}{=} (-1)^{n+k} \int_{-1}^1 u^n P_k(u) du = (-1)^{n+k} \langle X^n / P_k \rangle$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} P_n(-X) &= (-1)^n X^n - \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{n+2k} \frac{\langle X^n / P_k \rangle}{\|P_k\|^2} P_k(X) \\ &= (-1)^n P_n(X). \end{aligned}$$

2) a) Montrons que : $\forall n \neq m$, $\langle P_n / P_m \rangle = 0$.

Par symétrie on peut supposer que $m < n$ et on procède par récurrence :

La propriété est vraie pour $n=1$ (car $\langle P_1 / P_0 \rangle = \int_{-1}^1 x dx = 0$)

Supposons que pour tous $k < m \leq n-1$ $\langle P_k / P_m \rangle = 0$ et montrons que $\langle P_n / P_m \rangle = 0$.

$$\text{On a } \langle P_n / P_m \rangle = \langle X^n / P_m \rangle - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\langle X^n / P_k \rangle}{\|P_k\|^2} \langle P_k / P_m \rangle.$$

En tenant compte du fait que $\langle P_k / P_m \rangle = 0, \forall k < m \leq n-1$, on obtient

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\langle X^n / P_k \rangle}{\|P_k\|^2} \langle P_k / P_m \rangle = \frac{\langle X^n / P_m \rangle}{\|P_m\|^2} \langle P_m / P_m \rangle = \langle X^n / P_m \rangle \\ \Rightarrow \langle P_n / P_m \rangle = 0.$$

b) On sait que $\dim E_n = n+1$.

Comme $\deg(P_k) = k \Rightarrow \{P_0, P_1, \dots, P_n\}$ est une base de E_n .

On pourra aussi montrer que la famille $\{P_0, P_1, \dots, P_n\}$ est libre.

Pour cela soit $\alpha_0 P_0 + \alpha_1 P_1 + \dots + \alpha_n P_n = 0$.

$$\Rightarrow \forall 0 \leq k \leq n, \langle \alpha_0 P_0 + \alpha_1 P_1 + \dots + \alpha_n P_n / P_k \rangle = 0.$$

D'après 2-a) on trouve $\alpha_k \|P_k\|^2 = 0$ et par conséquent $\alpha_k = 0, \forall 0 \leq k \leq n$ (car $\|P_k\|^2 \neq 0$).

3) a) Comme $\{P_0, P_1, \dots, P_p\}$ est une base de E_p , alors $X^p = \sum_{j=0}^p \beta_j P_j$.

$$\Rightarrow \langle P_n / X^p \rangle = \sum_{j=0}^p \beta_j \langle P_n / P_j \rangle = 0$$

(car d'après 2-a) $\langle P_n / P_j \rangle = 0 \forall 0 \leq j \leq p < n$).

b) Il suffit d'écrire $Q = \sum_{k=0}^q a_k X^k$ et d'utiliser 3-a).

$$\text{c) On a } P_{n-1} = X^{n-1} - \sum_{k=0}^{n-2} \frac{\langle X^{n-1} / P_k \rangle}{\|P_k\|^2} P_k$$

$$\Rightarrow X P_{n-1} = X^n - \sum_{k=0}^{n-2} \frac{\langle X^{n-1} / P_k \rangle}{\|P_k\|^2} X P_k = X^n + Q, \text{ avec } \deg(Q) \leq n-1 < n.$$

Or $\langle P_n / Q \rangle = 0$ (d'après 3-a)).

$$\Rightarrow \langle P_n / X P_{n-1} \rangle = \langle P_n / X^n \rangle + \langle P_n / Q \rangle = \langle P_n / X^n \rangle.$$

On a $X^n = P_n + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\langle X^n / P_k \rangle}{\|P_k\|^2} P_k$

$$\Rightarrow \langle P_n / X P_{n-1} \rangle = \langle P_n / X^n \rangle = \left\langle P_n / P_n + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\langle X^n / P_k \rangle}{\|P_k\|^2} P_k \right\rangle$$

(1/5)

$$= \langle P_n / P_n \rangle + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\langle X^n / P_k \rangle}{\|P_k\|^2} \langle P_n / P_k \rangle$$

$$= \|P_n\|^2 + 0 \quad (\text{d'après 2-a})$$

(1)

4) a) Immédiate.

b) $\deg(X P_n) = n + 1$, il se décompose dans la base $\{P_0, P_1, \dots, P_{n+1}\}$:

$$X P_n = \sum_{j=0}^{n+1} \alpha_j P_j.$$

Pour tout $0 \leq k \leq n + 1$, on a

$$\langle X P_n / P_k \rangle = \sum_{j=0}^{n+1} \alpha_j \langle P_j / P_k \rangle = \alpha_k \|P_k\|^2 \quad (\text{d'après 2-a}).$$

D'autre part

$$\langle X P_n / P_k \rangle \stackrel{(\text{d'après 4-a})}{=} \langle P_n / X P_k \rangle = 0 \quad \text{si } k + 1 < n \quad (\text{d'après 3-b}).$$

On en déduit que $\alpha_k \|P_k\|^2 = 0$, si $k < n - 1$.

(2/5)

Comme $\|P_k\|^2 \neq 0$, $\alpha_k = 0$ pour tout $k < n - 1$.

Donc $X P_n$ s'écrit alors $X P_n = \alpha_{n-1} P_{n-1} + \alpha_n P_n + \alpha_{n+1} P_{n+1}$.

Il suffit de prendre $a_n = \alpha_{n+1}$, $b_n = \alpha_n$ et $c_n = \alpha_{n-1}$.

$\Rightarrow X P_n = a_n P_{n+1} + b_n P_n + c_n P_{n-1}$, pour tout $n \geq 1$.

c) $X P_n$ étant un polynôme de degré $n + 1$, son terme de plus haut degré est X^{n+1} .

(1)

De même le polynôme $a_n P_{n+1} + b_n P_n + c_n P_{n-1}$ est de degré $n + 1$, son terme de plus haut degré est $a_n X^{n+1}$, ce qui donne (d'après 4-b) $a_n = 1$, pour tout $n \geq 1$.

On a $\langle XP_n / P_n \rangle = \int_{-1}^1 x (P_n(x))^2 dx = 0$ (car $x \mapsto (P_n(x))^2$ est paire).

D'autre part

$$\langle XP_n / P_n \rangle = \langle P_{n+1} / P_n \rangle + b_n \|P_n\|^2 + c_n \langle P_{n-1} / P_n \rangle = b_n \|P_n\|^2$$

$\Rightarrow b_n = 0$ pour tout $n \geq 1$.

On a $\langle XP_n / P_{n-1} \rangle = \langle P_{n+1} / P_{n-1} \rangle + c_n \|P_{n-1}\|^2 = c_n \|P_{n-1}\|^2$.

D'autre part

$$\langle XP_n / P_{n-1} \rangle = \langle P_n / XP_{n-1} \rangle = \|P_n\|^2 \quad (\text{d'après 3-c}).$$

$$\Rightarrow c_n = \frac{\|P_n\|^2}{\|P_{n-1}\|^2} \text{ pour tout } n \geq 1.$$

Partie II

1) a) $R_n = (X^2 - 1)^n$ est un polynôme de degré $2n \Rightarrow Q_n = \frac{d^n}{dx^n}(R_n)$ est la dérivée $n^{\text{ième}}$ d'un polynôme de degré $2n$, donc $\deg(Q) = n$.

Le coefficient du plus haut degré de Q est $\frac{(2n)!}{n!}$.

b) On sait que $\dim E_n = n + 1$.

Comme $\deg(Q_k) = k \Rightarrow \{Q_0, Q_1, \dots, Q_n\}$ est une famille libre dans E_n et par suite c'est une base de E_n .

2) a) Le polynôme R_n possède deux racines 1 et -1 d'ordre de multiplicité égale à n .

$$\Rightarrow \forall 0 \leq k \leq n-1, \quad \frac{d^k}{dx^k} R_n(1) = \frac{d^k}{dx^k} R_n(-1) = 0.$$

b) Soit $P \in E$, on a $\langle Q_n / P \rangle = \int_{-1}^1 \frac{d^n}{dx^n} R_n(x) P(x) dx$.

En faisant une première intégration par parties et en tenant compte de 2-a) on obtient

$$\langle Q_n / P \rangle = - \int_{-1}^1 \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} R_n(x) \left(\frac{d}{dx} P(x) \right) dx$$

Après n -intégrations par parties on trouve

$$\langle Q_n / P \rangle = (-1)^n \int_{-1}^1 \left[\frac{d^n}{dx^n} P(x) \right] R_n(x) dx.$$

c) Comme $m < n$, d'après 2-b) on a $\langle Q_n / P_m \rangle = (-1)^n \int_{-1}^1 \left[\frac{d^n}{dx^n} P_m(x) \right] R_n(x) dx$.

Or $\left[\frac{d^n}{dx^n} P_m(x) \right] = 0$, (car $0 \leq m < n$)

$\Rightarrow \langle Q_n / P_m \rangle = 0, \forall 0 \leq m < n$.

d) Soit $n \in \mathbb{N}$. On décompose le polynôme Q_n sur la base $\{P_0, P_1, \dots, P_n\}$:

$$Q_n = \sum_{k=0}^n \lambda_k P_k.$$

Pour $m < n$, on a : $0 = \langle Q_n / P_m \rangle = \sum_{k=0}^n \lambda_k \langle P_k / P_m \rangle = \lambda_m \|P_m\|^2$.

$\Rightarrow \lambda_m = 0$ pour tout $m < n$ et par conséquent $Q_n = \lambda_n P_n$.

En identifiant les monômes de plus haut degré on obtient $\lambda_n = \frac{(2n)!}{n!}$.

3) a) D'après 2-b), on a

$$I_n = \|Q_n\|^2 = \langle Q_n / Q_n \rangle = (-1)^n \int_{-1}^1 \left[\frac{d^n}{dx^n} Q_n(x) \right] R_n(x) dx$$

$$\text{or } \frac{d^n}{dx^n} Q_n(x) = \frac{d^{2n}}{dx^{2n}} R_n(x) = \frac{d^{2n}}{dx^{2n}} (X^{2n}) = (2n)!$$

$$\Rightarrow I_n = (-1)^n (2n)! \int_{-1}^1 R_n(x) dx = (-1)^n (2n)! J_n.$$

b) On a

$$\begin{aligned} J_n &= \int_{-1}^1 (x^2 - 1)^n dx \\ &= \int_{-1}^1 (x^2 - 1)(x^2 - 1)^{n-1} dx \\ &= \int_{-1}^1 x^2 (x^2 - 1)^{n-1} dx - J_{n-1} \end{aligned}$$

Par une intégration par parties (avec $u(x) = x$ et $v'(x) = x(x^2 - 1)^{n-1}$) on obtient :

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 x^2 (x^2 - 1)^{n-1} dx &= \int_{-1}^1 (x^2 - 1)^n dx \\ &= \left[\frac{x(x^2 - 1)^n}{2n} \right]_{-1}^1 - \frac{1}{2n} \int_{-1}^1 (x^2 - 1)^n dx \\ &= 0 - \frac{1}{2n} J_n\end{aligned}$$

(1.5)

$$\Rightarrow J_n = -\frac{2n}{2n+1} J_{n-1}, \forall n \geq 1.$$

D'après la relation de récurrence on obtient :

$$J_n = (-1)^n \frac{(2n)(2n-2) \cdots 2}{(2n+1)(2n-1) \cdots 3} J_0.$$

Or $J_0 = 2$.

(2)

$$\Rightarrow J_n = (-1)^n \frac{2^{2n+1} (n!)^2}{(2n+1)!}.$$

(1.5)

$$c) \cdot \|Q_n\|^2 = (-1)^n (2n)! J_n = \frac{2^{2n+1} (n!)^2}{2n+1}.$$

On a $\|Q_n\| = \lambda_n \|P_n\|$

(1.5)

$$\Rightarrow \|P_n\|^2 = \frac{\|Q_n\|^2}{\lambda_n^2} = \frac{2^{2n+1} (n!)^2}{2n+1} \cdot \frac{(n!)^2}{(2n!)^2} = \frac{2^{2n+1} (n!)^4}{(2n+1)(2n!)^2}.$$

(1.5)

$$c_n = \frac{\|P_n\|^2}{\|P_{n-1}\|^2} = \frac{n^2}{4n^2 - 1}.$$
