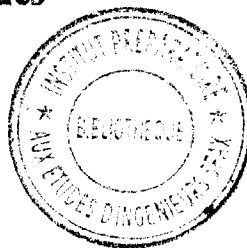




Concours Physique et Chimie
Epreuve de Mathématiques



Durée : 4 H Date : 05 Juin 2006 Heure : 8 H Nb pages : 5

Barème : Exercice : 4 pts. Problème : Partie I : 6 pts. Partie II : 10 pts.

Une grande importance sera attachée à la rigueur du raisonnement, à la clarté et au soin de la présentation. L'usage des calculatrices n'est pas autorisé.
Il est rappelé que tout résultat énoncé dans le texte peut être utilisé pour traiter la suite, même s'il n'a pu être démontré.

Exercice

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, on note $M_n(C)$ l'algèbre des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans C et I_n la matrice identité.

Pour toute matrice M de $M_n(C)$, on désigne par P_M le polynôme caractéristique de M et par $Sp(M)$ le spectre de M .

Soient $a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \in C$. On note J et A les matrices de $M_n(C)$ définies par :

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & a_1 & \dots & a_{n-2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ a_2 & \dots & \dots & a_0 & a_1 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & a_0 \end{pmatrix}.$$

On désigne par u l'endomorphisme de C^n canoniquement associé à J .



1.a. Soit k un élément de $\{1, 2, \dots, n\}$.

$$\text{Montrer que } u^p(e_k) = \begin{cases} e_{k+n-p} & \text{si } 1 \leq k \leq p \\ e_{k-p} & \text{si } p < k \leq n \end{cases} \text{ pour tout } p = 1, 2, \dots, n-1,$$

où $(e_1, \dots, e_n)$ est la base canonique de C^n .

1.b. Montrer que $J^n = I_n$ et que $A = a_0 I_n + a_1 J + \dots + a_{n-1} J^{n-1}$.

2.a. Montrer que la famille $(I_n, J, \dots, J^{n-1})$ est libre.

2.b. Montrer qu'il n'existe pas de polynôme non nul de degré inférieur ou égal à $n-1$ annihilant J .

2.c. En déduire que $\text{Sp}(J) = \{\omega^k, k = 0, \dots, n-1\}$ où $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$,
et que $P_J(X) = (-1)^n (X^n - 1)$.

3. Diagonaliser J puis A .

4. On suppose que $a_k = k+1$, $k = 0, \dots, n-1$.

Calculer le déterminant de la matrice A .

Problème

On note E le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des fonctions continues de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$.

Soit F le sous-espace vectoriel de E constitué des applications polynomiales,
pour tout entier naturel n , on note F_n le sous-espace vectoriel de E
des applications polynomiales de degré inférieur ou égal à n .
Les éléments de F peuvent aussi être considérés comme des polynômes.

On désigne par T et θ les endomorphismes de E définis par :

$$\forall f \in E \text{ et } \forall x > 0, T(f)(x) = f(x+1) - f(x) \text{ et } \theta(f)(x) = \int_x^{x+1} f(t) dt.$$

Partie I

I.1.1. Montrer que F est stable par T .

I.1.2. Pour $P \in F$, calculer le degré de $T(P)$ en fonction du degré de P .

I.2. On note Δ l'endomorphisme de F induit par T .

I.2.1. Montrer que le noyau de Δ est égal à F_0 .

I.2.2. Montrer que Δ admet une unique valeur propre.
Quel est le sous-espace propre associé ?

- I.3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
- I.3.1. Montrer que l'image par Λ de F_n est égal à F_{n-1} .
- I.3.2. Soit $G_n = \{P \in F_n, P(0) = 0\}$.
Montrer que Λ réalise un isomorphisme de G_n sur F_{n-1} .
- I.3.3. Déterminer $A \in F_4$ de sorte que pour tout $x \in]0, +\infty[$,
 $A(X+1) - A(X) = X^3$ et $A(0) = 0$.
En déduire la valeur de $\sum_{k=1}^n k^3$.
- I.4. On note C_1 l'espace vectoriel des fonctions continues et 1-périodiques sur $\mathbb{R}_+$.
- I.4.1. Déterminer $\text{Ker } T$.
- I.4.2. Montrer que $f \in \text{Ker } \theta \Leftrightarrow f \in \text{Ker } T$ et $\theta(f)(1) = 0$.
- I.4.3. On munit C_1 du produit scalaire $\langle . / . \rangle$ défini par
$$\langle f / g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt, \text{ pour tous } f \text{ et } g \text{ éléments de } C_1.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note e_n la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par :
$$e_n(t) = \sqrt{2} \cos(2\pi nt).$$

Montrer que $(e_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une famille orthonormale de $\text{Ker } T$.
 $\text{Ker } T$ est-il de dimension finie ?
- I.5.1. Soient f et g deux éléments de E .
Montrer que si $T(f) = g$ alors pour tout entier naturel n non nul
et pour tout x de $]n, n+1]$, $f(x) = f(x-n) + \sum_{i=1}^n g(x-i)$.
- I.5.2. En déduire que T est surjectif.
On pourra considérer d'abord le cas où g est prolongeable en 0.
- I.5.3. Montrer que $\theta(f)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$.
 θ est-il surjectif ?
Déterminer l'image de θ .

Partie II

- II.1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction u_n de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ par :
- $$\forall x \geq 0, u_n(x) = \frac{x}{n} - \text{Log}\left(1 + \frac{x}{n}\right).$$
- II.1.1. Montrer que la série de fonctions de terme général u_n converge simplement sur $\mathbb{R}_+$.

Dans toute la suite du problème, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ est notée S et γ désigne la valeur de $S(1)$.

II.1.2. Montrer que S est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$, et que

$$\forall x \geq 0, S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x} \right).$$

II.1.3. On se propose de calculer $\theta(S)(1)$.

II.1.3.1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{n=1}^N \theta(u_n)(1) = \frac{3}{2} \sum_{n=1}^N u_n(1) + \frac{3}{2} \text{Log}(N+1) + 2 \text{Log } 2 + \text{Log}(N!) + N - (N+2) \text{Log}(N+2).$$

II.1.3.2. En déduire que $\theta(S)(1) = \frac{3}{2} \gamma - 2 \text{Log } 2 + \text{Log} \sqrt{2\pi} - 2$.

On rappelle la formule de Stirling : $N! \sim_{+\infty} \sqrt{2\pi N} e^{-N} N^N$.

II.2. On se propose de montrer qu'il existe un unique élément f de E vérifiant :

$$(1) \begin{cases} \forall x \in]0, +\infty[, \theta(f)(x) = \text{Log}(x) \\ f \text{ est croissante sur }]0, +\infty[. \end{cases}$$

II.2.1. On suppose qu'il existe deux éléments f_1 et f_2 de E vérifiant (1) et on note $\delta = f_1 - f_2$.

II.2.1.1. Prouver que $\delta \in \text{Ker } \theta$.

En déduire que pour tout $x \in]0, 1]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\delta(x) = \delta(x+n) \text{ et } \delta(n) = \delta(1).$$

II.2.1.2. Montrer que pour tout $x \in]0, 1]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$-\frac{1}{n} \leq \delta(x) - \delta(1) \leq \frac{1}{n}.$$

En déduire que $f_1 = f_2$.

II.2.2. Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = -\gamma - \frac{1}{x} + S'(x)$ est l'unique élément de E vérifiant (1).

II.3. On se propose de montrer qu'il existe un unique élément g de E vérifiant :

$$(2) \begin{cases} \forall x \in]0, +\infty[, \theta(g)(x) = x \text{Log}(x) - x + \text{Log} \sqrt{2\pi} \\ g(1) = 0 \\ g \text{ est } C^1 \text{ sur }]0, +\infty[\text{ et } g' \text{ est croissante sur }]0, +\infty[. \end{cases}$$

II.3.1. Montrer que si g vérifie (2) alors g' vérifie (1).

II.3.2. Montrer que la fonction g définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $g(x) = -\gamma x - \text{Log } x + S(x)$ est l'unique élément de E vérifiant (2).

II.4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction ψ_n de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x > 0, \psi_n(x) = \frac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}$$

II.4.1. Montrer que $\forall x > 0$, $\text{Log}(\psi_n(x))$ tend vers $g(x)$ quand n tend vers $+\infty$.

II.4.2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction I_n de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$I_n(x) = \int_0^1 (1-t)^n t^{x-1} dt.$$

II.4.2.1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction I_n .

II.4.2.2. Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in]0, +\infty[$,

$$n^x I_n(x) = \int_0^n (1-\frac{t}{n})^n t^{x-1} dt.$$

II.4.2.3. Trouver une relation entre $I_n(x)$ et $I_{n-1}(x+1)$.

En déduire l'expression de $I_n(x)$ en fonction de n et de x .

II.5. On considère la fonction Γ définie sur $\mathbb{R}^+$ par $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$.

II.5.1. Montrer que la fonction Γ est C^1 sur $]0, +\infty[$ et que

$$\forall x > 0, \Gamma'(x) = \int_0^{+\infty} \text{Log}(t) e^{-t} t^{x-1} dt.$$

II.5.2. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n (1-\frac{t}{n})^n t^{x-1} dt = \Gamma(x)$.

En déduire que $\Gamma(x) = \exp(g(x))$.

II.5.3. Montrer que pour tout $x \in]0, +\infty[$,

$$\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = -\gamma - \frac{1}{x} + S'(x).$$

II.5.4. Montrer que pour tout $x \in]0, 1[$,

$$\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = -\gamma - \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{n^{k+1}} x^k \right).$$

II.5.5. On admet que l'on peut intervertir dans la formule précédente les deux sommations.

II.5.5.1. Déterminer le rayon de convergence de la série entière

$$\sum_{k \geq 1} (-1)^{k+1} \zeta(k+1) x^k \quad \text{où} \quad \zeta(k) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^k}.$$

II.5.5.2. Prouver que pour tout $x \in]0, 1[$,

$$\Gamma(x+1) = \exp(-\gamma x + \sum_{k=2}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^k}{k} \zeta(k)).$$

II.5.6. Démontrer alors que $\int_0^{+\infty} \text{Log}(t) e^{-t} dt = -\gamma$.