

Partie I

1. f nilpotent d'indice q , $f^q = 0$ et $f^{q-1} \neq 0$ soit $x \in E$ tq $f^{q-1}(x) \neq 0$ donc $(x, f(x), \dots, f^{q-1}(x))$ est libre (évident) on a $\dim(\text{vect} \langle (x, f(x), \dots, f^{q-1}(x)) \rangle) = q \leq n$
2. a) d'après 1. pour $q = n = \dim E$ donc $(x, f(x), \dots, f^{n-1}(x))$ est une base de E
 b) soit $i \in \mathbb{N}$ pour $j \geq i$ soit $x \in \ker(f^{j+1})$ donc $f^{j+1}(x) = f^{i+1}(f^{j-i}(x)) = 0$ or $f^{i+1} = f^i$ donc $f^i(f^{j-i}(x)) = f^j(x) = 0$ d'où $x \in \ker(f^j)$ par suite $\ker(f^{j+1}) \subseteq \ker(f^j)$ l'autre inclusion est évidente par suite $\ker(f^i) = \ker(f^j)$, pour tout entier naturel $j \geq i$.
 c) soit $i < n$ si $\ker(f^i) = \ker(f^{i+1})$ alors d'après b) pour tout entier naturel $j \geq i$ on a $\ker(f^i) = \ker(f^j)$ par conséquent $\ker(f^i) = \ker(f^n) = E$ donc $f^i \equiv 0$ ce qui est impossible car $i < n$ et n indice de nilpotence de f
 d) on a $\{0\} \subset \ker(f) \subset \dots \subset \ker(f^n) = E$
 d'où $0 = \dim(\{0\}) < \dim(\ker(f)) < \dots < \dim(\ker(f^n)) = n$ donc pour tout $k \in \{0, 1, \dots, n\}$, $\dim(\ker(f^k)) = k$.
3. (i) $\Rightarrow$ (ii) soit f nilpotent d'indice q il existe $x \in E$ tq $f^{q-1}(x) \neq 0$ et $f^q(x) = f(f^{q-1}(x)) = 0$ donc $0 \in \text{sp}_{\mathbb{C}}(M)$ d'où $\{0\} \subseteq \text{sp}_{\mathbb{C}}(M)$
 réciproquement soit $\lambda \in \text{sp}_{\mathbb{C}}(M)$ et $x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ tq $Mx = \lambda x$ on a $M^q = 0$ donc $\lambda^q x = 0$ ce qui donne $\lambda = 0$
 (ii) $\Rightarrow$ (iii) $P_f(X) = \prod_{\lambda_i \in \text{sp}_{\mathbb{C}}(M)} (\lambda_i - X) = (-1)^n X^n$.
 (iii) $\Rightarrow$ (i) Cayley Hamilton.
4. a) s'il existe i tq $\lambda_i = 0$ ou $i \neq j$ tq $\lambda_i = \lambda_j$ on a $\det = 0$ supposons que pour tout $\lambda_i \neq 0$ et pour tout $i \neq j$ $\lambda_i \neq \lambda_j$
 $\det = \prod_{i=1}^k \lambda_i P(\lambda_k)$ où P est un polynôme en λ_k de degré $k-1$ qui s'annule en $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$
 d'où $\det = \prod_{i=1}^k \lambda_i (\alpha \prod_{i=1}^k (\lambda_k - \lambda_j))$ où α est le coefficient de plus haut degré de $P(\lambda_k)$ on a par
 itération $\det = \prod_{i=1}^k \lambda_i \prod_{1 \leq i < j \leq k} (\lambda_j - \lambda_i)$
 b) $\text{tr}(f) = 0$ implique $\sum_{i=1}^k \omega_i \lambda_i = 0$
 $\text{tr}(f^2) = 0$ implique $\sum_{i=1}^k \omega_i \lambda_i^2 = 0$
 ...



$$\text{tr}(f^k) = 0 \text{ implique } \sum_{i=1}^k \omega_i \lambda_i^k = 0$$

d'où le système

- c) si f est nilpotent on a $\text{tr}(f) = 0$ si f est nilpotent alors si f^i est nilpotent par suite $\text{tr}(f^i) = 0$ réciproquement supposons que pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ $\text{tr}(f^i) = 0$ d'après b) si $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$

les valeurs propres de f on a

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_k \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \dots & \lambda_k^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^k & \lambda_2^k & \dots & \lambda_k^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \vdots \\ \omega_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{d'après 4)a) la}$$

matrice $\begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_k \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \dots & \lambda_k^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^k & \lambda_2^k & \dots & \lambda_k^k \end{pmatrix}$ est inversible donc $\omega_1 = \omega_2 = \dots = \omega_k = 0$ absurde d'où

$\text{sp}_{\mathbb{C}}(M) = \{0\}$ et par suite f est nilpotent

Partie II

1. évident

2. a) par récurrence

b) soit $x \in \ker(v^k)$ donc $v^k(u(x)) = -\alpha k v^{k-1}(x) + u(v^k(x)) = 0$
d'où $u(x) \in \ker(v^k)$

c) pour tout k on a $\text{tr}[v, v^k] = 0$ donc $\forall k \in \mathbb{N}^* \text{tr}(v^k) = 0$ par conséquent v est nilpotent

3. a) d'après I.1.d) $\dim(\ker(v^k)) = k$. d'autre part $(x_1, \dots, x_k) \subset \ker(v^k)$ est une sous famille de $(x_1, \dots, x_n) = (x, v(x), \dots, v^{n-1}(x))$ qui est une base d'après I.2.a) conclusion $(x_1, \dots, x_k)$ est une base de $\ker(v^k)$

b) on a $\ker(v) = \text{vect}(x_1)$. Or d'après II.2.b) $\ker(v)$ est stable par u d'où $u(x_1) = \lambda_1 x_1$.

c) Conséquence du fait que $\ker(v^k) = (x_1, \dots, x_k)$ est stable par u .

d) $v(u(x_{k+1})) = u(v(x_{k+1})) - \alpha v(x_{k+1}) = u(v^{n-k}(x)) - \alpha v^{n-k}(x) = u(x_k) - \alpha x_k$

e) On a $u(x_{k+1}) = \lambda_{k+1} x_{k+1} + \alpha_k x_k + \dots + \alpha_1 x_1$

$$u(x_k) = \lambda_k x_k + \beta_{k-1} x_{k-1} + \dots + \beta_1 x_1$$

en égalisant dans II.3.d) on aura $\lambda_{k+1} = \lambda_k - \alpha$ et par conséquent $\forall k \lambda_k = \lambda - (k-1)\alpha$.

f) u admet n valeurs propres distincts deux à deux donc u est diagonalisable.

4. a) $u(e_k) = u(v^{n-k}(e_n)) = v^{n-k}(u(e_n)) + \alpha(n-k)v^{n-k}(e_n) = [\lambda_n + \alpha(n-k)]e_k = \lambda_k e_k$

b) $v(e_k) = v(v^{n-k}(e_n)) = v^{n-(k-1)}(e_n) = e_{k-1}$. on a $e_n \neq 0$ car e_n est un vecteur propre associé à λ_n . si $e_{n-1} = 0$ alors $v(e_n) = 0$ donc $e_n \in \ker(v) = \text{vect}(x_1)$ ce qui est contradictoire avec $\lambda_1 \neq \lambda_n$

supposons que $e_k \neq 0$ et vérifions que $e_{k-1} \neq 0$ $k \geq 2$ en effet si $e_{k-1} = 0$ alors $v(e_k) = 0$

donc $e_k \in \ker(v) = \text{vect}(x_1)$ ce qui est contradictoire avec $\lambda_1 \neq \lambda_k$

c) On a $(e_1, e_2, \dots, e_n) = (v^{n-1}(e_n), v^{n-2}(e_n), \dots, v(e_n), e_n)$
comme $v^{n-1}(e_n) = e_1 \neq 0$ donc d'après I)2)a) $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une base de E

d) $\text{mat}(u)_{(e_1, e_2, \dots, e_n)} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_1 - \alpha, \dots, \lambda_1 - (n-1)\alpha);$

$$\text{mat}(v)_{(e_1, e_2, \dots, e_n)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

5. Application

a) $AB - BA = B \alpha = 1$ d'après II)2)C) v est nilpotent

b) $\text{sp}(u) = \{1, 0, -1\}$ et $\lambda_3 = -1$

c) soit $e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ $e_2 = v(e_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $e_1 = v(e_2) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\text{mat}(u)_{(e_1, e_2, e_3)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } \text{mat}(v)_{(e_1, e_2, e_3)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Partie III

1. évident

2. a) $\langle \Phi_A(X), Y \rangle = \langle [A, X], Y \rangle = \text{tr}((AX - XA)^t Y) = \text{tr}(X^t ({}^t A Y - Y {}^t A)) = \langle X, [{}^t A, Y] \rangle = \langle X, \Phi_{{}^t A}(Y) \rangle$ d'où le résultat.

b) On a $\text{Im}(\Phi_A) = (\ker(\Phi_A^*))^\perp = \ker(\Phi_{{}^t A})^\perp$

3. Soit A une matrice nilpotente et $B \in \ker(\Phi_{{}^t A})$ donc ${}^t B A = A {}^t B$.

A nilpotente et commute avec ${}^t B$ donc $A {}^t B$ nilpotente et par suite $\text{tr}(A {}^t B) = 0$ ce qui donne $\langle A, B \rangle = 0$ d'où $A \in \ker(\Phi_{{}^t A})^\perp = \text{Im}(\Phi_A)$

réciroquement si $A \in \text{Im}(\Phi_A)$ il existe alors $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tque $AB - BA = A$ c.a.d $[B, A] = -A$ d'où A est nilpotente d'après II.2.c

4. Si A est semblable à $2A$ alors $\forall n$ A^n est semblable à $2^n A^n$ et par suite $\text{tr}(A^n) = \text{tr}(2^n A^n) \forall n$ ce qui donne $\text{tr}(A^n) = 0 \forall n \in \mathbb{N}^*$ d'où A est nilpotente.

5. a) Conséquence de III.3

b) On montre par récurrence que $\forall k$ $AB^k = (B + I)^k A$ d'où $\forall Q \in \mathbb{R}[X]$ $AQ(B) = Q(B + I)A$

c) $\forall d$, $AQ_d(B) = Q_d(B + I)A$ si en fait tendre d vers l'infini on aura le résultat

d) Il suffit de prendre $\lambda = \ln(2)$

Partie IV

1. a) Par récurrence
b) Conséquence immédiate de I.4.c
2. Par récurrence
3. a) Si $k = 1$ on a $AX = 0$ implique $[A, B]X = \lambda X$ implique que $\lambda \in \text{sp}_{\mathbb{C}}([A, B]) = \{0\}$ d'où $\lambda = 0$
b) Si $k > 1$ on a $A^k BX - BA^k X = kABA^{k-1}X - kBA^k X$ d'où $AB(A^{k-1}X) = \frac{\lambda}{k}A^{k-1}X$
c) Soit λ une valeur propre complexe de AB .
on a ou bien $\lambda = 0$ ou bien il existe $p > 1$ tqe $\frac{\lambda}{p}$ est aussi une valeur propre complexe de AB de meme ou bien $\frac{\lambda}{p} = 0$ et par suite $\lambda = 0$ ou bien il existe $q > 1$ tqe $\frac{\lambda}{pq}$ est une valeur propre complexe de AB comme le spectre dans $\mathbb{C}$ de AB est fini on a toujours $\lambda = 0$ et par suite AB est nilpotente.