

Concours Mathématiques et Physique
Correction de l'Epreuve de Mathématiques I

Partie -I-

1. (a)

$$a_0(H) = \frac{1}{2\Pi} \int_0^{2\Pi} \frac{\Pi - t}{2} dt = \frac{1}{2\Pi} \left[-\frac{(\Pi - t)^2}{2} \right]_0^{2\Pi} = 0,$$

$$\forall n \geq 1 \quad a_n(H) = \frac{1}{\Pi} \int_0^{2\Pi} \frac{\Pi - t}{2} \cos(nt) dt = \frac{1}{\Pi} \left(\left[\frac{(\Pi - t)}{2n} \sin(nt) \right]_0^{2\Pi} + \frac{1}{2n} \int_0^{2\Pi} \sin(nt) dt \right) = 0$$

et

$$b_n(H) = \frac{1}{\Pi} \int_0^{2\Pi} \frac{\Pi - t}{2} \sin(nt) dt = \frac{1}{\Pi} \left(\left[-\frac{(\Pi - t)}{2n} \cos(nt) \right]_0^{2\Pi} - \frac{1}{2n} \int_0^{2\Pi} \cos(nt) dt \right) = \frac{1}{n}$$

(b) H est continue sur $]0, 2\Pi[$ et prolongeable par continuité sur $[0, 2\Pi]$, de plus H est 2Π -périodique $\Rightarrow H$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ d'après Parseval

$$\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} |b_n(H)|^2 = \frac{1}{2\Pi} \int_0^{2\Pi} |H(t)|^2 dt = \frac{1}{2\Pi} \int_0^{2\Pi} \frac{(\Pi - t)^2}{4} dt = \frac{\Pi^2}{12}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\Pi^2}{6}$$

2. $|xe^{it}| < 1 \Rightarrow$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n e^{-(n+1)it} = e^{-it} \sum_{n=0}^{+\infty} (xe^{it})^n = e^{-it} \frac{1}{1 - xe^{-it}} = \frac{1}{e^{it} - x}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x - e^{it}} = - \sum_{n=0}^{+\infty} x^n e^{-(n+1)it}.$$

3.

$$- \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \cos(n+1)t = \operatorname{Re} \left(\frac{1}{x - e^{it}} \right) = \operatorname{Re} \left[\frac{x - e^{-it}}{(x - \cos(t))^2 + \sin^2(t)} \right] = \frac{x - \cos(t)}{x^2 - 2x \cos(t) + 1}$$

4. $\forall x \in]-1, 1[$, $\sup_{u \in [0, x]} |u^n \cos((n+1)t)| = |x^n|$, or $\sum_{n \geq 1} |x^n|$, converge $\Rightarrow$

$\sum_{n \geq 1} u^n \cos((n+1)t)$ converge normalement donc uniformément sur $[\vec{0}, x]$, d'autre part $\forall x \in]-1, 1[$ et $\forall t \in \mathbb{R}$ $x^2 - 2x \cos(t) + 1 = (x - \cos(t))^2 + \sin^2(t) > 0 \Rightarrow$
 $\int_0^x \left(\sum_{n=1}^{+\infty} u^n \cos((n+1)t) \right) du = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_0^x u^n du \right) \cos((n+1)t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} \cos((n+1)t) =$
 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} \cos(nt) = \int_0^x \frac{\cos(t) - u}{u^2 - 2u \cos(t) + 1} du = -\frac{1}{2} \lg(x^2 - 2x \cos(t) + 1) \Rightarrow$

$$-2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} \cos(nt) = \lg(x^2 - 2x \cos(t) + 1).$$

5. (a) On sait que $\forall x \in]-1, 1[$ et $\forall t \in \mathbb{R}$ $x^2 - 2x \cos(t) + 1 > 0 \Rightarrow G_x$ est continue sur $\mathbb{R}$ 2Π -périodique et paire.

- (b) On $\forall p \in \mathbb{N} \sum_{n \geq 1} \frac{x^n \cos(nt) \cos(pt)}{n}$ et $\sum_{n \geq 1} \frac{x^n \sin(nt) \sin(pt)}{n}$ converge normalement sur $[0, 2\pi] \Rightarrow$

$$a_0(G_x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(-\frac{1}{2} \ln(x^2 - 2x \cos(t) + 1)\right) dt = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} \int_0^{2\pi} \cos(nt) dt = 0$$

et $\forall p \geq 1$

$$\begin{aligned} a_p(G_x) &= \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} \int_0^{2\pi} \cos(nt) \cos(pt) dt = \\ \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \cos((n+p)t) + \cos((n-p)t) dt &= \frac{x^p}{p} \\ \text{et } G_x \text{ est paire, } b_p(G_x) &= 0. \end{aligned}$$

- (c) G_x est continue sur $\mathbb{R}$ 2π -périodique et paire d'après Parseval on a:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |G_x(t)|^2 dt &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{n^2} \Rightarrow \\ \frac{1}{8\pi} \int_0^{2\pi} |(\ln(x^2 - 2x \cos(t) + 1))|^2 dt &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{n^2} \Rightarrow \\ \int_0^{2\pi} (\ln(x^2 - 2x \cos(t) + 1))^2 dt &= 4\pi \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{n^2}. \end{aligned}$$

6. On a: $\sum_{n \geq 1} \frac{x^{2n}}{n^2}$ converge normalement sur $[0, 1]$ et $\forall n \geq 1, \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{2n}}{n^2} = \frac{1}{n^2} \Rightarrow$
 $\lim_{x \rightarrow 1} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$

7. Soient $(t, x) \in]0, \pi[\times]-1, 1[$

$$\cos^2\left(\frac{t}{2}\right) = \frac{4 \cos^2\left(\frac{t}{2}\right) \sin^2\left(\frac{t}{2}\right)}{4 \sin^2\left(\frac{t}{2}\right)} = \frac{\sin^2(t)}{4 \sin^2\left(\frac{t}{2}\right)} \leq \frac{x^2 - 2x \cos(t) + 1}{2 - 2 \cos(t)} = \frac{(x - \cos(t))^2 + \sin^2(t)}{4 \sin^2\left(\frac{t}{2}\right)} \leq \frac{4}{4 \sin^2\left(\frac{t}{2}\right)}$$

8. $\forall t \in]0, \pi[, \frac{t}{2} \in]0, \frac{\pi}{2}[$, $0 < \cos^2\left(\frac{t}{2}\right) \Rightarrow \ln(\cos^2\left(\frac{t}{2}\right)) \leq \ln\left(\frac{x^2 - 2x \cos(t) + 1}{2 - 2 \cos(t)}\right) \leq \ln\left(\frac{1}{\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)}\right) \Rightarrow$
 $|\ln\left(\frac{x^2 - 2x \cos(t) + 1}{2 - 2 \cos(t)}\right)| \leq \max(2|\ln(\sin\left(\frac{t}{2}\right))|, 2|\ln(\cos\left(\frac{t}{2}\right))|) \leq -2(\ln(\sin\left(\frac{t}{2}\right)) + \ln(\cos\left(\frac{t}{2}\right)))$ Donc
 $|\ln\left(\frac{x^2 - 2x \cos(t) + 1}{2 - 2 \cos(t)}\right)| \leq 2|\ln\left(\frac{1}{2} \sin(t)\right)|.$

9. (a) $\forall t \in]0, 2\pi[, \frac{t}{2} \in]0, \pi[$ $\sin\left(\frac{t}{2}\right) > 0$ au voisinage de 0, $G^2(t) = \ln^2(2(\frac{t}{2} + o(t))) = 2 \ln(t + o(t)) = o\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$ et au voisinage de 2π $G^2(t)$ est intégrable au voisinage de 2π ssi $G^2(h + 2\pi)$ est intégrable au voisinage de 0 $G^2(h + 2\pi) = \ln^2(-\sin(\frac{h}{2}))$ avec $h < 0$ donc G^2 est intégrable sur $]0, 2\pi[$.

$\int_0^{2\pi} |G_x(t) - G(t)|^2 dt = \int_0^{\pi} |G_x(t) - G(t)|^2 dt + \int_{\pi}^{2\pi} |G_x(t) - G(t)|^2 dt$ un changement variable dans la deuxième intégrale $\pi - t = h$ et $v = -h$ on aura

$\int_0^{2\pi} |G_x(t) - G(t)|^2 dt = 2 \int_0^{\pi} |G_x(t) - G(t)|^2 dt$ et $\lim_{x \rightarrow 1} |G_x(t) - G(t)| = 0$ et $|G_x(t) - G(t)|^2 \leq |\ln(\frac{1}{2} \sin(t))|^2 = o\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$, intégrable au voisinage de 0 même raisonnement au voisinage de π d'où le résultat.

- (b) On a: $\int_0^{2\pi} |G_x(t) - G(t)|^2 dt = \int_0^{2\pi} G_x^2(t) dt - 2 \int_0^{2\pi} G_x(t) G(t) dt + \int_0^{2\pi} G^2(t) dt$ en raisonnant comme en (a) et en utilisant la domination $|G_x(t) G(t)| \leq |\ln(2 \sin(\frac{t}{2}))| |\ln(2 \sin(\frac{t}{2})) + \ln(\frac{1}{2} \sin(t))| = o\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$ et $\lim_{x \rightarrow 1} (G_x(t) G(t)) = G^2(t)$ on aura $\lim_{x \rightarrow 1} \int_0^{2\pi} G_x(t) G(t) dt = \int_0^{2\pi} G^2(t) dt$ donc

$$\int_0^{2\pi} G^2(t) dt = \lim_{x \rightarrow 1} \int_0^{2\pi} G_x^2(t) dt = \pi \lim_{x \rightarrow 1} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{n^2} = \pi \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^3}{6},$$

d'où $\int_0^{2\pi} |\ln(2 \sin(\frac{t}{2}))|^2 dt = \frac{\pi^3}{6}.$

Partie -II-

1. Soit g une solution constante qui vaut a de l'équation E_p on aura $a = pa$
 $\Rightarrow a = 0$, puisque $p \geq 2$.
2. (a) $\tilde{f}(t + 2\Pi) = \sum_{k=0}^{p-1} f(t + 2\Pi + \frac{2k\Pi}{p}) = \tilde{f}(t)$ et $\tilde{f}$ est la somme des fonctions continues donc continue.
 $f_p(t + 2k\Pi) = f(p(t + 2k\Pi)) = f(pt) = f_p(t)$ et f_p est la composée des fonctions continues donc continue.

- (b) $\forall n \in \mathbb{Z}$
 $-C_{np}(\tilde{f}) = \frac{1}{2\Pi} \sum_{k=0}^{p-1} \int_0^{2\Pi} f(t + \frac{2k\Pi}{p}) e^{-inpt} dt$ un changement de variable on pose
 $u = t + \frac{2k\Pi}{p}$ on aura

$$C_{np}(\tilde{f}) = \frac{1}{2\Pi} \sum_{k=0}^{p-1} \int_{\frac{2k\Pi}{p}}^{2\Pi + \frac{2k\Pi}{p}} f(u) e^{-inp(u - \frac{2k\Pi}{p})} du = \sum_{k=0}^{p-1} C_{np}(f) = pC_{np}(f)$$

- $-C_{np}(f_p) = \frac{1}{2\Pi} \int_0^{2\Pi} f_p(t) e^{-inpt} dt$ un changement de variable on pose
 $u = pt$ on aura

$$C_{np}(f_p) = \frac{1}{2p\Pi} \int_0^{2p\Pi} f(u) e^{-inu} du = \frac{1}{2p\Pi} \sum_{k=0}^{p-1} \int_{2k\Pi}^{2(k+1)\Pi} f(u) e^{-inu} du = C_n(f).$$

3. (a) g solution de $(E_p) \Rightarrow g(pt) = \sum_{k=0}^{p-1} g(t + \frac{2k\Pi}{p}) \Rightarrow pg'(pt) = \sum_{k=0}^{p-1} g'(t + \frac{2k\Pi}{p}) \Rightarrow$
 $g'(pt) = \frac{1}{p} \sum_{k=0}^{p-1} g'(t + \frac{2k\Pi}{p}).$
- (b) $pg'(pt) = \tilde{g}'(t) = pg'_p(t)$ or $\forall n \in \mathbb{Z}$
 $C_n(g') = C_{np}(g'_p) = C_{np}(\frac{\tilde{g}'}{p}) = \frac{1}{p} C_{np}(\tilde{g}') = C_{np}(g') \Rightarrow C_n(g') = C_{np}(g').$
- (c) $C_0(g') = \frac{1}{2\Pi} \int_0^{2\Pi} g'(t) dt = \frac{1}{2\Pi} (g(2\Pi) - g(0)) = 0$
- (d) Soit $n \in \mathbb{Z}^*$
 - i. $\forall r \in \mathbb{N} \ C_n(g') = C_{np}(g') = C_{np^2}(g') = C_{np^r}(g')$
 - ii. g' est continue 2Π -périodique donc $\lim_{r \rightarrow +\infty} C_{np^r}(g') = 0 \Rightarrow C_n(g') = 0.$
- (e) Les coefficients de Fourier exponentiels de g' sont nuls d'après Parseval g' est nulle.
- (f) g est constante est solution de E_p , d'après 1) partie II) g est nulle.

4. (a) $\sum_{n \geq 0} \frac{\sin(2^n t)}{2^{(n+1)}}$ converge normalement donc uniformément sur $\mathbb{R}$ et $t \mapsto \frac{\sin(2^n t)}{2^{(n+1)}}$ est continue, 2Π -périodique car $\frac{\sin(2^n(t+2\Pi))}{2^{(n+1)}} = \frac{\sin(2^n t)}{2^{(n+1)}} \ \forall n \in \mathbb{N}$ donc g continue 2Π -périodique.
- (b) $g(\frac{t}{2}) + g(\frac{t+2\Pi}{2}) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin(2^n \frac{t}{2}) + \sin(2^n \frac{t+2\Pi}{2})}{2^{(n+1)}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin(2^{n-1} t)}{2^{(n+1)}} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin(2^{n-1} t + 2^n \Pi)}{2^{(n+1)}} =$
 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(2^{n-1} t)}{2^{(n+1)}} + \frac{\sin(2^0 t)}{2^{(0+1)}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(2^{n-1} t)}{2^n} = g(t)$
- (c) $g(0) = 0, g(\frac{\Pi}{2}) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin(2^{n-1} \Pi)}{2^{(n+1)}} = \frac{1}{2}$
- (d) $g(0) \neq g(\frac{\Pi}{2}) \Rightarrow g$ n'est pas constante.
- (e) g est une solution de E_2 qui n'est pas constante donc g n'est pas C^1 .

Partie -III-

1. Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et $p \geq 2$,

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad C_n(g) &= \frac{1}{2\Pi} \int_0^{2\Pi} g(t) e^{-int} dt = \frac{1}{2\Pi} \sum_{k=0}^{p-1} \int_0^{2\Pi} g\left(\frac{t+2k\Pi}{p}\right) e^{-int} dt \\ &= \sum_{k=0}^{p-1} \int_{\frac{2k\Pi}{p}}^{\frac{2(k+1)\Pi}{p}} g(u) e^{-in(pu-2k\Pi)} p du \text{ un changement de variable, } (u = \frac{t+2k\Pi}{p}) \\ C_n(g) &= p C_{np}(g). \end{aligned}$$

(b) i. Pour $n = 0$ $C_0(g) = p C_0(g)$ et $p \geq 2 \Rightarrow C_0(g) = 0$.

$$\text{Pour } n = 1 \quad C_p(g) = \frac{C_1(g)}{p}.$$

$$\text{Pour } n = -1 \quad C_p(g) = \frac{C_{-1}(g)}{p}.$$

$$\text{ii. } a_0 = C_0(g) = 0, a_p = C_p(g) + C_{-p}(g) = \frac{C_1(g) + C_{-1}(g)}{p} = \frac{\alpha}{p} \text{ avec } \alpha = C_1(g) + C_{-1}(g).$$

$$b_p = i(C_p(g) - C_{-p}(g)) = \frac{i}{p} \left(\frac{C_1(g) - C_{-1}(g)}{p} \right) = \frac{\beta}{p} \text{ avec } \beta = i(C_1(g) - C_{-1}(g)).$$

2. Puisque $g - \alpha G_x - \beta H$ continue par morceaux 2Π -périodique d'après Parseval donc

$$\frac{1}{2\Pi} \int_0^{2\Pi} |g(t) - \alpha G_x(t) - \beta H(t)|^2 dt = \frac{|a_0(g - \alpha G_x - \beta H)|^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} (|a_n(g - \alpha G_x - \beta H)|^2 + |b_n(g - \alpha G_x - \beta H)|^2) = \frac{1}{2} |\alpha|^2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(1-x^n)^2}{n^2}.$$

3. $\forall x \in [0, 1]$ et $\forall n \geq 1$ on a: $\frac{(1-x^n)^2}{n^2} \leq \frac{4}{n^2} \Rightarrow \sum_{n \geq 1} \frac{(1-x^n)^2}{n^2}$ converge normalement donc uniformément sur $[0, 1]$ et $\forall n \geq 1 \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(1-x^n)^2}{n^2} = 0 \lim_{x \rightarrow 1^-} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(1-x^n)^2}{n^2} = 0$.

4. En utilisant l'hypothèse de domination faite à G_x dans la question 6) parti I) on aura

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \int_0^{2\Pi} |g(t) - \alpha G_x(t) - \beta H(t)|^2 dt = \int_0^{2\Pi} |g(t) - \alpha G(t) - \beta H(t)|^2 dt.$$

$$5. \int_0^{2\Pi} |g(t) - \alpha G(t) - \beta H(t)|^2 dt = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{2} |\alpha|^2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(1-x^n)^2}{n^2} = 0.$$

$$6. g - \alpha G - \beta H \text{ est continue sur }]0, 2\Pi[\text{ et } \int_0^{2\Pi} |g(t) - \alpha G(t) - \beta H(t)|^2 dt = 0 \Rightarrow g - \alpha G - \beta H = 0.$$

7. Supposons que $\alpha \neq 0$ g est continue en 0 $\Rightarrow |g(0)| = \lim_{t \rightarrow 0^+} |g(t)| = \lim_{t \rightarrow 0^+} |\frac{\alpha}{2} G(t) + \beta H(t)| = \infty$ absurde.
 $\Rightarrow g = \beta H$ supposons que $\beta \neq 0$ $g(0) = g(2\Pi) = \beta \lim_{t \rightarrow 0^+} |H(t)| = \beta \frac{\Pi}{2} = \beta \lim_{t \rightarrow (2\Pi)^-} |H(t)| = -\beta \frac{\Pi}{2} \Rightarrow \beta = 0 \Rightarrow g = 0$ sur $]0, 2\Pi[$ et comme g est continue 2Π -périodique sur $\mathbb{R} \Rightarrow g = \tilde{0}$.

Partie -IV-

$$1. f_n(x) = \ln\left(\frac{\Gamma_{n+1}(x)}{\Gamma_n(x)}\right) = \ln\left(\frac{(n+1)^x}{n^x} \frac{1}{\frac{x}{n+1} + 1}\right) = -\ln\left(1 + \frac{x}{(n+1)}\right) - x \ln\left(1 - \frac{1}{(n+1)}\right).$$

$$2. f_n(x) = -\left[\frac{x}{n+1} + o\left(\frac{1}{(n+1)^2}\right)\right] - x\left[\frac{1}{n+1} + o\left(\frac{1}{(n+1)^2}\right)\right] = o\left(\frac{1}{(n+1)^2}\right) \Rightarrow \sum_{n \geq 1} f_n \text{ converge simplement sur } \mathbb{R}_+^*.$$

$$f_n \text{ est de classe } C^2 \text{ et } \forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad f'_n(x) = -\ln\left(1 - \frac{1}{(n+1)}\right) - \frac{1}{n+1} \left(1 + \frac{x}{n+1}\right)^{-1} \text{ et}$$

$$f''_n(x) = \frac{1}{\left(1 + \frac{x}{n+1}\right)^2} \geq 0 \text{ donc } f'_n \text{ est croissante et } f'_n(0) = -\ln\left(1 - \frac{1}{(n+1)}\right) - \frac{1}{n+1}.$$

Soit $g(x) = -\ln(1-x) - x$ avec $x \in]0, 1[$ on a $g'(x) = \frac{x}{1-x} > 0 \Rightarrow g$ est croissante et $g(0) = 0$ donc $g \geq 0$, par la suite f'_n est croissante et positive.

Soit $[a, b] \subset \mathbb{R}_+^*$,

$$\sup_{x \in [a, b]} |f'_n(x)| = f'_n(b) = -\left(-\frac{1}{n+1} + o\left(\frac{1}{(n+1)^2}\right)\right) - \frac{1}{n+1} \left(1 + \frac{b}{n+1}\right)^{-1} = o\left(\frac{1}{(n+1)^2}\right)$$

$\Rightarrow \sum_{n \geq 1} f'_n$ converge uniformément sur $[a, b]$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$.

3. $\sum_{n=1}^N f_n(x) = \ln(\Gamma_{N+1}(x)) - \ln(\Gamma_1(x))$ or $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$ vers une fonction de classe C^1 notée $f \Rightarrow (\ln(\Gamma_N))_N$ converge simplement vers g sur $\mathbb{R}_+^*$ avec $g(x) = f(x) + \ln\left(\frac{1}{x(x+1)}\right)$, $\forall x > 0$, donc $(\Gamma_N)_N$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$ vers une fonction de classe C^1 notée $\Gamma = \exp(g)$.

4. (a) $\forall x > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$ on a:

$$\Gamma_{n+1}(x+1) = \frac{n^{x+1} n! x}{x(x+1)(x+2) \cdots (x+n+1)} = \frac{n x}{x+n+1} \Gamma_n(x)$$

$$(b) \forall x > 0, \Gamma(x+1) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \Gamma_{n+1}(x+1) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n x}{x+n+1} \Gamma_n(x) = x \Gamma(x).$$

5. (a) $\forall x > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$ on a:

$$\begin{aligned} \Gamma_n\left(\frac{x}{2}\right) \Gamma_n\left(\frac{x+1}{2}\right) &= \frac{n^{\frac{x}{2}} n!}{\frac{x}{2}(\frac{x}{2}+1)(\frac{x}{2}+2) \cdots (\frac{x}{2}+n)} \frac{n^{\frac{x+1}{2}} n!}{\frac{x+1}{2}(\frac{x+1}{2}+1)(\frac{x+1}{2}+2) \cdots (\frac{x+1}{2}+n)} = \\ &= \frac{n^x \sqrt{n} (n!)^2}{\frac{1}{2^n} x(x+2)(x+4) \cdots (x+2n) \frac{1}{2^{n+1}} (x+1)(x+3)(x+5) \cdots (x+2n+1)} = \\ &= \frac{2^{2n+2} n^x \sqrt{n} (n!)^2 (2n)! (2n)^{2x}}{(2n)! (2n)^{2x} x(x+1)(x+2) \cdots (x+2n)(x+2n+1)} = \\ &= \frac{2^{2n+2} n^x \sqrt{n} (n!)^2 \Gamma_{2n}(x)}{(2n)^x (2n)! (x+2n+1)} = \\ &= \frac{2^{2n+2} \sqrt{n} (n!)^2 \Gamma_{2n}(x)}{(2)^x (2n)! (x+2n+1)}. \end{aligned}$$

(b)

$$\frac{(n!)^2}{(2n)!} \sim \frac{2\pi n n^{2n} e^{-2n}}{\sqrt{4n\pi} (2n)^{2n} e^{-2n}} \sim \frac{\sqrt{n\pi}}{2^{2n}}$$

$\Rightarrow$

$$\frac{2^{2n+2} \sqrt{n} (n!)^2}{(2n)! (2)^{2x} (x+2n+1)} \sim 2^{1-x} \sqrt{\pi}$$

$\Rightarrow$

$$\Gamma_n\left(\frac{x}{2}\right) \Gamma_n\left(\frac{x+1}{2}\right) \sim 2^{1-x} \sqrt{\pi} \Gamma_{2n}(x)$$

$$\text{d'où } \Gamma(x) = \frac{2^{x-1}}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{x}{2}\right) \Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right).$$

6. (a) On a: $\forall x > 0$ $g(x+2\Pi) = g(x)$ et

$$\ln\left(\Lambda\left(\frac{x+2\Pi}{2\Pi}\right)\right) - \ln\left(\Gamma\left(\frac{x+2\Pi}{2\Pi}\right)\right) = \ln\left(\frac{\Lambda\left(\frac{x+2\Pi}{2\Pi}\right)}{\Gamma\left(\frac{x+2\Pi}{2\Pi}\right)}\right) = \ln\left(\frac{\Lambda\left(\frac{x}{2\Pi}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{x}{2\Pi}+1\right)}\right) = \ln\left(\frac{\Lambda\left(\frac{x}{2\Pi}\right)}{\Gamma\left(\frac{x}{2\Pi}\right)}\right) = \ln\left(\Lambda\left(\frac{x}{2\Pi}\right)\right) - \ln\left(\Gamma\left(\frac{x}{2\Pi}\right)\right)$$

$$\text{donc } \forall x > 0 \quad g(x) = \ln\left(\Lambda\left(\frac{x}{2\Pi}\right)\right) - \ln\left(\Gamma\left(\frac{x}{2\Pi}\right)\right).$$

$$(b) \text{ D'autre part } \forall x > 0, g(x) = \ln\left(\frac{\Lambda\left(\frac{x}{2\Pi}\right)}{\Gamma\left(\frac{x}{2\Pi}\right)}\right) = \ln\left(\frac{\frac{p^{2x-1}}{(\sqrt{2\Pi})^{p-1}} \prod_{k=0}^{p-1} \Lambda\left(\frac{x}{2\Pi} + \frac{k}{p}\right)}{\frac{p^{2x-1}}{(\sqrt{2\Pi})^{p-1}} \prod_{k=0}^{p-1} \Gamma\left(\frac{x}{2\Pi} + \frac{k}{p}\right)}\right) =$$

$$\sum_{k=0}^{p-1} [\ln(\Lambda(\frac{x+2k\Pi}{2\Pi})) - \ln(\Gamma(\frac{x+2k\Pi}{2\Pi}))] = \sum_{k=0}^{p-1} g\left(\frac{x+2k\Pi}{2\Pi}\right) \text{ et l'application } x \mapsto \sum_{k=0}^{p-1} g\left(\frac{x+2k\Pi}{2\Pi}\right)$$

$$\text{est } 2\Pi\text{-périodique en effet } \sum_{k=0}^{p-1} g\left(\frac{x+2\Pi+2k\Pi}{2\Pi}\right) = \sum_{k=0}^{p-1} g\left(\frac{x+2(k+1)\Pi}{2\Pi}\right) = \sum_{k=1}^p g\left(\frac{x+2k\Pi}{2\Pi}\right) =$$

$$\sum_{k=1}^{p-1} g\left(\frac{x+2k\Pi}{2\Pi}\right) + g\left(\frac{x+2p\Pi}{2\Pi}\right) = \sum_{k=0}^{p-1} g\left(\frac{x+2k\Pi}{2\Pi}\right),$$

$$\text{d'où } \forall x \in \mathbb{R}, g(x) = \sum_{k=0}^{p-1} g\left(\frac{x+2k\Pi}{2\Pi}\right).$$

- (c) D'après question 4) partie III une solution g de E_p continue 2Π -périodique est nulle donc $\forall x > 0$, $\ln(\Lambda(\frac{x}{2\Pi})) = \ln(\Gamma(\frac{x}{2\Pi}))$ par la suite $\Lambda = \Gamma$.

2

3

4

5

6

7