

Dans ce problème on étudie la famille de fonctions f_λ définies par :

$$f_\lambda(x) = 1 + \ln(1+\lambda x) \text{ où } \lambda \text{ est un nombre réel non nul.}$$

I- On recherche le nombre de points d'intersection de la courbe représentative C_λ de f_λ dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ avec la droite (D) d'équation $y = x$.

1- Donner l'ensemble de définition de f_λ (on distinguera les deux cas : $\lambda \geq 0$ et $\lambda < 0$)

2- On pose $\varphi_\lambda(x) = f_\lambda(x) - x$.

a) On suppose $\lambda < 0$. Étudier les variations de φ_λ ainsi que ses limites aux bornes de l'ensemble de définition.

En déduire le nombre de points d'intersection de C_λ et (D) .

b) On suppose $\lambda > 0$. Étudier les variations de φ_λ

ainsi que les limites aux bornes de l'ensemble de définition (on pourra par exemple mettre x en facteur dans l'expression de $\varphi_\lambda(x)$ pour déterminer les limites à l'infini).

Etablir que la plus grande valeur prise par $\varphi_\lambda(x)$ quand x décrit l'ensemble de définition de φ_λ est $m(\lambda) = \frac{1}{\lambda} + \ln \lambda$.

c) Étudier quand λ décrit $]0, +\infty[$ les variations de $m(\lambda)$; en déduire son signe.

d) Combien, lorsque $\lambda > 0$, C_λ et (D) ont-elles de points communs ?

1-a) Comparez $f_\lambda(x)$ et $f_{-\lambda}(-x)$.

Existe-il un lien entre les deux courbes C_λ et $C_{-\lambda}$?

b) Soit Γ la représentation graphique de la fonction logarithme népérien.

Trouver, lorsque $\lambda > 0$ une translation qui transforme Γ en C_λ .

c) Représenter dans un même repère orthonormé (on prendra comme unité 3cm) les courbes $(\Gamma), C_2, C_{-2}$ et (D) .

II- Calcul d'une valeur approchée de l'abscisse des points d'intersection de la courbe C_λ avec la droite (D) dans le cas particulier $\lambda = 1$.

Soit le plan affine euclidien P muni du repère orthonormé $R = \{O, (i, j)\}$ et soit $\vec{P}$ le plan vectoriel associé muni de la base orthonormée directe $B = \{\vec{i}, \vec{j}\}$ (avec $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1\text{cm}$).

I – Soit le point $\Omega(1,1)$ du plan $\mathcal{P}$ et les vecteurs :

$\vec{I} = 4\vec{i} + 3\vec{j}$ et $\vec{J} = \vec{j}$ du plan $\vec{P}$. Soit le repère $r = (\Omega, \vec{I}, \vec{J})$ du plan. Un point M sera repéré par ses coordonnées x et y dans R et X et Y dans r . Soit $(\mathcal{C})$ la courbe d'équation $XY = \frac{3}{4}$ dans le repère r .

1-Reconnaître la nature de $(\mathcal{C})$.

2- Etablir les relations entre x, y, X et Y . Montrer qu'une équation de $(\mathcal{C})$ dans le repère R est :
 $(x - 1)(4y - 3x - 1) = 12$.

Mettre cette équation sous la forme $y = f(x)$ où f est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ à déterminer.

3- Etudier les variations de la fonction f et construire $(\mathcal{C})$.

4- Calculer l'aire en cm^2 de la partie (D) du plan P définie dans le repère r par :

$$\left\{ M(X, Y) / \frac{1}{2} \leq X \leq 1 \text{ et } 0 \leq Y \leq \frac{3}{4X} \right\} \text{ on donne } \ln 2 \approx 0,69.$$

II- Soit h l'application affine de P dans P qui au point $M(x, y)$ associe le point $M'(x', y')$ dans le repère R par les relations :

$$\begin{cases} 5x' = 3x - 4y + 6 \\ 5y' = -4x - 3y + 12 \end{cases}$$

1-Déterminer la matrice dans la base $\mathcal{B}$ de l'endomorphisme associé ϕ de h .

Quelle est la nature de ϕ ?

2- Montrer que l'ensemble des points invariants par h est une droite (d) dont on donnera une équation.

Déduire des résultats précédents la nature de h dans R .

3- Déterminer l'image du point Ω par h puis exprimer $\phi(\vec{I})$ et $\phi(\vec{J})$ en fonction de $\vec{I}$ et $\vec{J}$.

En déduire l'expression de h dans le repère r sous la forme :

$$\begin{cases} X' = aX + bY + c \\ Y' = a'X + b'Y + c' \end{cases} \text{ où } a, b, c, a', b', c' \text{ sont des réels à déterminer.}$$

Retrouver ce résultat d'une autre manière. Quelle est la nature de h dans le repère r ?

4-a) Montrer que la droite (Δ) d'équation $Y = 5X$ dans le repère r est globalement invariante par h .

b) Montrer que la courbe $(\mathcal{C})$ est globalement invariante par h .

III/ 1-Déterminer dans R un vecteur unitaire $\vec{k}$ de (Δ) dont les coordonnées seront positives. Soit ρ la rotation vectorielle du plan vectorielle $\vec{P}$ tel que $\rho(\vec{k}) = \vec{i}$ et soit g la rotation du plan affine P de centre Ω et d'endomorphisme associé ρ .

2- Déterminer la matrice de ρ dans la base $\mathcal{B}$.

3- Soit $M(x, y)$ et $M'(x', y')$ deux points dans le repère R tels que $g(M) = M'$. Déterminer x' et y' en fonction de x et y . En déduire X et Y en fonction X' et Y' .

4- Déterminer par son équation dans R l'image $(\mathcal{C}')$ de la courbe $(\mathcal{C})$ par g (on aura intérêt à passer par l'intermédiaire du repère r).

a) Quelle est la nature de la courbe $(\mathcal{C}')$, en donner les éléments caractéristiques.

b) Retrouver les éléments caractéristiques de la courbe $(\mathcal{C})$.