

A/ Soit E un espace vectoriel de dimension deux sur $\mathbb{R}$. E_1 et E_2 deux sous espaces vectoriels supplémentaires de E et soit a un réel. Pour tout vecteur $\vec{v}$ de E il existe $\vec{v}_1$ de E_1 et $\vec{v}_2$ de E_2 ; $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ uniques tels que $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$.

1° Soit f_a une application de E dans E telle que : $\forall \vec{v} \in E ; \vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 . \vec{v}_1 \in E_1, \vec{v}_2 \in E_2 \quad f_a(\vec{v}) = \vec{v}_1 + a\vec{v}_2$.

- Montrer que f_a est linéaire.
- Préciser la nature de f_0 et f_1 .

2° On suppose $a \neq 0$ et $a \neq 1$.

- Quels sont le noyau et l'image de f_a ?
- Quel est l'ensemble des points invariants par f_a ?
- f_a est – elle bijective?

3° On suppose que E est muni de la base $(\vec{i}; \vec{j})$. On prend pour E_1 la droite vectorielle d'équation $y = x$ et E_2 la droite vectorielle d'équation $y = -x$.

Déterminer un vecteur directeur de E_1 et un vecteur directeur de E_2 puis calculer $f_a(\vec{i} + \vec{j})$ et $f_a(\vec{i} - \vec{j})$.

B/ E étant toujours muni de la base $(\vec{i}; \vec{j})$, Soit E l'espace affine associé de repère $(O ; \vec{i}; \vec{j})$. $M(x ; y)$ étant un point de E ; on définit l'application g qui associe au point M le point $M'(x' ; y')$ de E avec
$$\begin{cases} x' = 2x - y + 1 \\ y' = -x + 2y - 1 \end{cases}$$
.

- Montrer que g est une application affine et indiquer l'application linéaire associée.
- Montrer que g est bijective.
- Quel est l'ensemble des points invariants par g ?
- Montrer que l'application f est de la forme des applications de la partie A.
Quelle est la valeur de a ?

2° Soit M un point du plan, H le projeté de M sur la droite d_1 d'équation $y = x + 1$ parallèlement à la droite d_2 d'équation $y = -x$.

Soit M' le point tel que $\overrightarrow{HM'} = 3 \overrightarrow{HM}$. Trouver les coordonnées de M' en fonction des coordonnées de M.

3° Soit d une droite ; l'image d'une droite par une application affine est une droite, donc $g(d) = d'$ est une droite. Montrer que d, d' et d_1 sont concourantes si d n'est pas parallèle à d_1 .

4°

a) Dessiner dans le repère $(O ; \vec{i}; \vec{j})$ les ensembles d_1 , d_2 et le $O' = g(O)$.

b) Quelle est l'image du triangle (A, O, B)?

c) Soit O_1 le centre de gravité de cet triangle, quelle est l'image de O_1 . Vérifier que $g(O_1)$ est bien le centre de gravité du triangle image. Placer O_1 sur le dessin.

d) Soit I le barycentre des points A, O, B affectés des coefficients 1, -1 et 1, quelles sont les coordonnées de I ? Vérifier que $g(I) = I'$ est le barycentre des points images de ces points affectés des mêmes coefficients.

Placer les points I et I' sur le dessin.

C/ L'espace vectoriel est supposé euclidien et la base $(\vec{i}; \vec{j})$ est orthonormée.

1° Montrer que les droites (AB) et (O I) sont perpendiculaires.

2° L'application g est elle une isométrie ?

3° Soit ($\mathcal{C}$) le cercle passant par les points A, O et B.

a) Ecrire son équation.

b) Ecrire l'équation de la courbe ($\mathcal{C}'$) transformée de ($\mathcal{C}$) par g.

c) Déterminer les éléments remarquables de ($\mathcal{C}'$) et la tracer sur un dessin avec les points O, A, B et I et leurs images.

Barème : A (6 points) ; B(8 points) C(6points)