

SÉRIES : *TSE*

Le sujet est composé de deux exercices et un problème tous obligatoires. Il comprend trois pages de 1/3 à 3/3 (*Vérifiez que les pages sont au complet*). La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation des copies. Les calculatrices non programmables sont autorisées.

Exercice 1 (6 points)

I-//

On se place dans le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes, pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$\forall z \in \mathbb{C}, h_n(z) = z^n(1 - z).$$

1-/ Pour $n \in \mathbb{N}^*$, résoudre l'équation $h_n(z) = h_0(z)$. (1pt)

2-/ On se propose de résoudre le système suivant : (1)
$$\begin{cases} h_n(z) = 1 \\ |z| = |1 - z| \end{cases}$$

a-/ Montrez que l'équation $|z| = |1 - z|$ a une infinité de solutions. (0,5pt)

b-/ Soit z_0 l'une de ces solutions, calculez, en fonction du module ρ et l'argument θ de z_0 , l'argument de $1 - z_0$; le module et l'argument de $z_0^n(1 - z_0)$. (1,5pt)

c-/ En déduire que le système (1) n'admet de solution que si $n \equiv 1[6]$. (0,5pt)

Quel est l'ensemble des solutions du système ? (0,5pt)

II-//

1-/ On considère dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E) : $11x + 8y = 79$.

a-/ Montrez que si $(x ; y)$ est solution de (E) alors $y \equiv 3[11]$ (0,5pt)

b-/ Résoudre alors l'équation (E). (0,5pt)

2-/ Le prix total de 41 pièces détachées réparties en trois lots est de 48000F.

Le prix d'une pièce du 1^{er} lot est 4800F ; le prix d'une pièce du 2^{ème} lot est 3600F et le prix d'une pièce du 3^{ème} lot est 400F.

Déterminez le nombre de pièces de chaque lot. (1pt)

NB: On pourra utiliser l'équation (E). Les parties I/ et II/ sont indépendantes

TSVP  

Exercice 2 (4 points)

I./ Dans une classe de terminale, la taille moyenne des élèves est de 167 cm. La taille moyenne des filles est de 160 cm et la taille moyenne des garçons est de 173,5 cm.

Quelle est l'effectif de la classe sachant qu'il est compris entre 50 et 60. (2pts)

II./ Le vieux Yara a laissé son héritage dans un coffre dont la combinaison comporte les cinq chiffres x, y, z, t et h dans cet ordre, du système décimal. Il a mentionné sur son testament que sa fortune reviendrait à celui de ses héritiers qui trouverait la combinaison à partir des données suivantes :

- Le 1^{er} chiffre est pair ;
- La somme des deux premiers chiffres est 15 ;
- Le troisième est la différence des deux premiers (le 1^{er} moins le 2^{ème}) ;
- Le 1^{er} chiffre est le produit du troisième par le quatrième ;
- Le nombre est divisible par 9.

Quelle est la combinaison cherchée ? (2pts)

NB: Les parties I./ et II./ sont indépendantes.

Problème (10 points)

A// Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = (x^2 + x + 1) e^{-x} - 1$

1-/ a-/ Déterminez les limites de φ en $-\infty$ puis en $+\infty$. Interpréter graphiquement le résultat de $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x)$ (1pt)

b-/ Calculez $\varphi'(x)$ et étudiez son signe. Dressez le tableau de variation de φ . (1,5pt)

2-/ Démontrez que l'équation $\varphi(x) = 0$ admet deux solutions dans $\mathbb{R}$, dont l'une notée α est dans $[1 ; +\infty[$. Vérifiez que $1,79 < \alpha < 1,80$ (1pt)

3-/ En déduire le signe de φ sur $\mathbb{R}$. (0,5pt)

B// On donne les fonctions f et g définies par $f(x) = (2x + 1)e^{-x}$ et $g(x) = \frac{2x+1}{x^2 + x + 1}$

Leurs courbes sont respectivement notées $(\mathcal{C}_f)$ et $(\mathcal{C}_g)$

1-/ Déterminez les domaines de définition de f et de g puis calculez leurs limites aux bornes de ces domaines de définition. (1pt)

2-/ Montrez que $(\mathcal{C}_f)$ et $(\mathcal{C}_g)$ admettent au point $A(0 ; 1)$ une tangente commune (T) . Donnez une équation cartésienne de (T) . (1,5pt)

3-/ a-/ Vérifiez que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) - g(x) = \frac{(2x+1)\varphi(x)}{x^2 + x + 1}$ où φ est la fonction définie dans la partie A (0,5pt)

b-/ Étudiez le signe de $f(x) - g(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$. (0,5pt)

c-/ En déduire la position relative des courbes $(\mathcal{C}_f)$ et $(\mathcal{C}_g)$ (0,5pt)

4-/ a-/ Déterminez une primitive G de la fonction g sur $\mathbb{R}$. (0,5pt)

b-/ Déterminez les réels a et b tels que la fonction F définie par $F(x) = (ax + b) e^{-x}$ soit une primitive de f sur $\mathbb{R}$. (0,5pt)

c-/ Déduire une primitive H de $f - g$ sur $\mathbb{R}$. (0,5pt)

d-/ Calculez l'aire, en unité d'aire, de la partie du plan délimitée par les courbes $(\mathcal{C}_f)$ et

$(\mathcal{C}_g)$ et les droites d'équations : $x = -\frac{1}{2}$ et $x = 0$ (0,5pt)

NB : Les tracés de $(\mathcal{C}_f)$ et $(\mathcal{C}_g)$ ne sont pas demandés