

❧ Baccalauréat C Nice septembre 1977 ❧

EXERCICE 1

3 POINTS

Soit a un nombre complexe non nul. On considère le polynôme :

$$P_a(z) = z^3 - 6az^2 + 12a^2z - 7a^3.$$

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P_1(z) = 0$. (On observera que $P_1(1) = 0$).
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P_a(z) = 0$. (On pourra poser $Z = \frac{z}{a}$).
3. Soit T_a le triangle dont les sommets ont pour affixes les racines de $P_a(z) = 0$.
Montrer que T_1 est équilatéral; en déduire que T_a est équilatéral pour tout a .

EXERCICE 2

5 POINTS

Soit P un plan affine euclidien orienté, rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

À tout point M de P , de coordonnées $(x; y)$, on associe son affixe $z = x + iy$.

Soient A, B, C les points de coordonnées respectives $(1; 0)$, $(0; 1)$, $(0; -1)$.

1.
 - a. Il existe une unique similitude directe s_1 de P telle que l'on ait $s_1(A) = B$ et $s_1(B) = C$.
Pour tout point M de P , d'affixe z , exprimer en fonction de z l'affixe z_1 du point $s_1(M)$, image de M par s_1 .
 - b. Trouver le centre K_1 , le rapport k_1 et l'angle α_1 de s_1 .
2. Il existe une unique similitude indirecte s_2 de P telle que l'on ait $s_2(A) = B$ et $s_2(B) = C$.
 - a. Pour tout point M de P d'affixe z , exprimer en fonction de z l'affixe z_2 du point $s_2(M)$, image de M par s_2 .
 - b. Trouver le centre K_2 , le rapport k_2 de s_2 et la droite Δ_2 telle que, si l'on note $h(K_2, k_2)$ l'homothétie de centre K_2 et de rapport k_2 et s_{Δ_2} la symétrie affine orthogonale par rapport à Δ_2 , l'on ait :

$$s_2 = h(K_2, k_2) \circ s_{\Delta_2} = s_{\Delta_2} \circ h(K_2, k_2)$$

PROBLÈME

12 POINTS

Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f : x \longmapsto e^{-x^2}.$$

Partie A

1. Démontrer que f est trois fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer f' , f'' , f''' .
2. Démontrer par récurrence sur n que, pour tout entier $n \geq 1$, la fonction f est n fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et que la dérivée n -ième $f^{(n)}$ s'exprime comme le produit de f et d'une fonction polynôme P_n , de degré n . (On ne demande pas de déterminer P_n).

3. Étudier les fonctions f, f', f'' et tracer leurs courbes représentatives dans un même repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. (On prendra $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 5 \text{ cm}$).
Démontrer en particulier que l'on a :

$$\text{pour } x > 1, \quad |f''(x)| > |f'(x)| > |f(x)|.$$

Déterminer les coordonnées des points d'intersection respectifs des trois courbes.

Partie B

Soit E l'espace vectoriel des fonctions trinômes de la fonction :

$$x \mapsto ax^2 + bx + c \quad (a, b, c) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

On sait que : $\dim E = 3$.

On pose : $\forall i \in \{0, 1, 2\}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad P_i(x) = e^{x^2} f^{(i)}(x) \quad (f^{(0)} = f)$.

1. Montrer que (P_0, P_1, P_2) est une base de E .
2. Soit Q la fonction trinôme définie par : $Q : x \mapsto -3 - 4x + 4x^2$.
Trouver les coordonnées de Q dans la base (P_0, P_1, P_2) .

3. On pose : $\forall i \in \{0, 1, 2\}, \quad A_i = \int_0^1 P_i(x) e^{-x^2} dx$.

Calculer A_1 et A_2 et démontrer que l'on a : $\frac{1}{e} \leq A_0 \leq 1$.

4. Soit φ l'application de E dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\varphi : S \mapsto \int_0^1 S(x) e^{-x^2} dx.$$

- a. Montrer que φ est une forme linéaire sur E .
- b. Calculer $\varphi(Q)$ en fonction de A_0 .
- c. Si S a pour coordonnées $(\alpha_0 ; \alpha_1 ; \alpha_2)$ dans la base (P_0, P_1, P_2) , calculer $\varphi(S)$ en fonction de $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$.
- d. Démontrer que le noyau $\text{Ker } \varphi$ de φ est un plan vectoriel de E dont on donnera une base.
- e. Démontrer que la droite vectorielle engendrée par P_0 est un sous-espace vectoriel supplémentaire de $\text{Ker } \varphi$ dans E .
- f. Démontrer que l'ensemble des polynômes S de E solutions du système :

$$(1) \quad \begin{cases} \varphi(S) &= 0 \\ 4S'(0) + S''(0) &= 0 \end{cases}$$

est un sous-espace vectoriel de E dont on donnera la dimension et une base.

Partie C

Pour tout entier naturel non nul, on désigne par g_n la fonction définie par :

$$g_n : x \mapsto x^n e^{-x^2}.$$

et on pose :

$$I_n = \int_0^1 g_n(x) dx.$$

1. Calculer I_1 .
2. Trouver une relation de récurrence entre I_n et I_{n-2} , ($n \geq 2$).
3. Utiliser cette relation pour calculer I_7 .