

🌀 Baccalauréat C Limoges septembre 1977 🌀

EXERCICE 1

5 POINTS

Pour tout réel donné a strictement positif, on considère la fonction f_a de variable réelle x , définie par :

$$f_a(x) = \text{Log} (a - e^x).$$

On appelle $\mathcal{C}_a$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, et D_a son domaine de définition.

1. Étudier f_a construire sa courbe représentative $\mathcal{C}_a$ et déterminer l'ensemble image $f_a(D_a)$.
2. Montrer que f_a est une bijection de D_a sur $f_a(D_a)$. Déterminer son application réciproque, en déduire que $\mathcal{C}_a$ possède un axe de symétrie,
3. b étant un réel strictement positif, montrer que $\mathcal{C}_b$ se déduit de $\mathcal{C}_a$ par une translation qu'on précisera,
Note : Log désigne le logarithme népérien.

EXERCICE 2

3 POINTS

b est un entier naturel donné strictement supérieur à 1. On rappelle que

$$b^2 - 1 = (b + 1)(b - 1).$$

1. Quel est le plus grand diviseur commun de b^2 et $(b - 1)$?
2. Quel est l'ensemble des solutions appartenant à $\mathbb{Z}^2$ de l'équation

$$b^2x + (b - 1)y = 1?$$

3. Application numérique : résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation

$$9x + 2y = 1.$$

PROBLÈME

12 POINTS

Partie A

Soit E l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2 de la forme)

$$M = \begin{pmatrix} a+b & a \\ a & -a+b \end{pmatrix}$$

où a et b sont des nombres réels,

1. Démontrer que E muni de l'addition des matrices et de la multiplication par un nombre réel est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. En donner une base.
2. Démontrer que E muni de l'addition et de la multiplication des matrices a une structure d'anneau. Est-ce un corps ?

3. Soit $\mathcal{P}$ le plan vectoriel euclidien de base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j})$ et soit f l'endomorphisme de $\mathcal{P}$ dont la matrice dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$ est un élément de E .

Définir, suivant les valeurs de a et b , le noyau et l'image de f .

f peut-il être involutif? Dans ce cas, préciser la nature de f .

Partie B

On suppose, dans toute la suite, $a = 1$ et $b = 0$.

Soit P le plan affine euclidien associé à $\mathcal{P}$, rapporté au repère cartésien orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Soit F l'application affine de P , associée à f , laissant le point I de coordonnées $(1; 2)$ invariant.

1. Tout point M de P , de coordonnées $(x; y)$ a pour image par F le point M' de coordonnées $(x'; y')$. Exprimer les coordonnées $(x'; y')$ de M' en fonction des coordonnées $(x; y)$ de M .
2. À tout point M de coordonnées $(x; y)$ de P , on associe le nombre complexe $z = x + iy$ (z affixe de M).

Si z' est l'affixe de M' et z l'affixe de M , montrer que :

$$z' = (1 + i)\bar{z} - 2 + 3i$$

($\bar{z}$ désigne le nombre complexe conjugué de z).

Donner la nature et les caractéristiques de l'application affine F .

3. Soit S la symétrie orthogonale par rapport à la droite affine d'équation

$$y = (1 - \sqrt{2})x + 1.$$

Quelle relation lie les affixes d'un point M et de son symétrique N ?

Préciser la nature de l'application affine $G = S \circ F$; en donner les caractéristiques.

4. Soit la famille de courbes (C) définie par l'équation

$$y^2 = m^2 x^2 - 2x + 1$$

où m est un paramètre réel. Discuter suivant les valeurs de m la nature des courbes (C) .

Construire la courbe correspondant à $m = \frac{1}{2}$ et son image par G .