

Baccalauréat C Dijon juin 1977

EXERCICE 1

3 POINTS

On considère l'anneau commutatif $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ dont les éléments sont notés $\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \dots, \overline{7}$.

1. Quels sont les éléments inversibles de $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$?
Montrer qu'ils forment un groupe multiplicatif. Dresser leur table.
2. Résoudre dans $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ le système suivant :

$$\begin{cases} \overline{3}x + \overline{6}y &= \overline{5} \\ \overline{5}x + \overline{2}y &= \overline{3}. \end{cases}$$

EXERCICE 2

5 POINTS

x étant réel, on note $E(x)$ le plus grand entier relatif inférieur ou égal à x .
On considère les fonctions :

$$\begin{array}{ccc} \varphi: \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x - E(x) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} h: [0; 1] & \rightarrow & [0; 1] \\ u & \mapsto & |2u - 1| \end{array}$$

1. Soit $f = h \circ \varphi$.
Démontrer que f est continue sur $\mathbb{R}$, que f admet le réel 1 pour période et est une fonction paire.
Représenter graphiquement f dans un plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
2. Soit F la restriction de f au segment $\left[0; \frac{1}{2}\right]$.
Démontrer que F admet une fonction réciproque F^{-1} dont on précisera l'ensemble de définition et l'ensemble image.
3. Soit $g = F^{-1} \circ f$.
Démontrer que g est définie, continue sur $\mathbb{R}$, périodique de période 1 et paire.
 k étant un entier relatif, exprimer $g(x)$ en fonction de x et de k dans les deux cas suivants :

$$x \in \left[k; k + \frac{1}{2}\right[\qquad x \in \left[k - \frac{1}{2}; k\right[$$

PROBLÈME

12 POINTS

Partie A

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, de dimension 3, $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base de E .
 m étant un réel, soit φ_m l'endomorphisme de E (application linéaire de E dans E) qui, au vecteur $\vec{u}$ de coordonnées $(x; y; z)$ associe le vecteur $\vec{u}_1 = \varphi_m(\vec{u})$ de coordonnées $(x_1; y_1; z_1)$ telles que

$$\begin{cases} x_1 &= 2mx + 3y + mz \\ y_1 &= (2 - m)x + (3m - 2)y + 6z \\ z_1 &= (m - 2)y + 2mz \end{cases}$$

1. Calculer les coordonnées des vecteurs $\varphi_m(\vec{i})$, $\varphi_m(\vec{j})$, $\varphi_m(\vec{k})$.
2. Démontrer que, quel que soit le réel m , le système de vecteurs $(\varphi_m(\vec{i}), \varphi_m(\vec{j}))$ est libre. (On pourra étudier d'abord le cas particulier $m = 2$, puis $m \neq 2$).
3. Déterminer l'ensemble des valeurs de m pour lesquels le système de vecteurs $(\varphi_m(\vec{i}), \varphi_m(\vec{j}), \varphi_m(\vec{k}))$ est lié. En déduire l'ensemble des valeurs de m pour lesquelles φ_m est un automorphisme de E .
4. On suppose $m = 0$.
Déterminer le noyau N_0 de φ_0 , l'image I_0 de φ_0 et démontrer que N_0 et I_0 sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E .
5. On suppose $m = 2$. Prouver que φ_2 est bijective et déterminer analytiquement l'application réciproque φ_2^{-1} .

Partie B

On rappelle que l'ensemble $\mathcal{F}$ des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, muni de l'addition et de la multiplication par un réel est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

1. À chaque triplet $(x; y; z)$ de réels, on associe l'application f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$:

$$(\forall t \in \mathbb{R}) \quad f(t) = xe^t + yte^t + zt^2e^t$$

e étant la base des logarithmes népériens.

Soit E l'ensemble des applications f , démontrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}$ et que les applications i, j, k de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies par :

$$\begin{cases} i(t) &= e^t \\ j(t) &= te^t \\ k(t) &= t^2e^t \end{cases}$$

forment une base de l'espace vectoriel E . $(x; y; z)$ sont alors les coordonnées de f dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

2. On note f' et f'' les fonctions dérivées première et seconde de f .
Calculer pour t réel, $f'(t)$ et $f''(t)$. En déduire que f' et f'' sont éléments de E .
3. On définit l'application ψ de E dans E telle que :

$$\psi(f) = 2f + f' + f''.$$

Démontrer que ψ est un endomorphisme de E et déterminer dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ les coordonnées x_1, y_1, z_1 de $\psi(f)$ en fonction de coordonnées de f .

En utilisant les résultats de A 5., prouver que ψ est une bijection de E sur E et déterminer ψ^{-1} sans nouveaux calculs.

4. Soit h élément de E définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad h(t) = (-3 - 6t + 4t^2)e^t$$

Résoudre dans E l'équation :

$$\psi(f) = h.$$

5. Étudier et représenter graphiquement dans le plan rapporté à un repère orthonormé la fonction f définie par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = (1 - 3t + t^2)e^t$$