

∞ Baccalauréat C Lille juin 1966 ∞
Mathématiques élémentaires et mathématiques et technique

EXERCICE 1

Soit la fonction définie par

$$y = f(x) = \sin x(7 + \cos 2x).$$

1. Comparer $f(-x)$ et $f(x)$.
2. Comparer $f(\pi - x)$ et $f(x)$.
3. Étudier et représenter graphiquement les variations de la fonction sur le segment $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.
4. En utilisant les résultats des questions 1. et 2., construire le graphe correspondant au segment $[-\pi; +\pi]$.

EXERCICE 1

Dans un plan orienté rapporté à un repère orthonormé direct Ox, Oy on prend les points $A(R; 0)$ et $B(-R; 0)$ (R : longueur donnée).

À tout point M du plan on associe le point M' défini par les conditions

$$\begin{cases} \text{module de } \overrightarrow{BM'} &= \text{module de } \overrightarrow{AM}, \\ \left(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM'}\right) &= \frac{\pi}{2} \text{ modulo } 2\pi. \end{cases}$$

On désigne par P le milieu de MM' .

Partie A

1. Préciser la nature géométrique de l'application (T) transformant M en M' et celle de l'application (T') transformant M en P .
Quel est le point double de (T) ?
2. Connaissant les coordonnées $(x; y)$ de M , donner les coordonnées $(x'; y')$ de M' et les coordonnées $(X; Y)$ de P .
3. M décrivant la droite d'équation $x = 2R$, préciser le lieu de M' , le lieu de P et l'enveloppe de la droite MM' .

Partie B

Dans tout ce qui suit, on suppose que M décrit le cercle de centre A et de rayon R .

1. Préciser le lieu de M' , le lieu de P et l'enveloppe de la droite MM' .
2. Écrire les équations dans le repère $\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Oy}$ du lieu de M , du lieu de M' , du lieu de P et de l'enveloppe de la droite MM' .
Montrer que l'enveloppe de MM' est bitangente au lieu de M , au lieu de M' et au lieu de P .
3. On désigne par α l'angle polaire $\left(\overrightarrow{Ax}, \overrightarrow{AM}\right)$ défini à $2k\pi$ près. Donner, en fonction de α et de R , les coordonnées de M , de M' et de P .
 R et α étant donnés, former l'équation cartésienne de la droite MM' . Calculer le carré, z , de la distance de l'origine O à la droite MM' .
Exprimer z en fonction de $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = t$.

4. Étudier les variations et le graphe de la fonction

$$z = \frac{2R^2(1+t)^2}{(t^2+1)(t^2+4t+5)},$$

R désignant une longueur donnée et t variant de $-\infty$ à $+\infty$.

À cet effet, on se bornera à effectuer le changement de variable défini par $\theta = t + 1$ et à étudier la fonction $z(\theta)$ ainsi obtenue.

N. B. - Les différentes questions sont, dans une large mesure, indépendantes.
Par « lieu », il faut entendre « ensemble de points ».