

Liban**1. Exercice 1 (5 points)**

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on donne les trois points :

$$A(1; 2; -1), B(-3; -2; 3) \text{ et } C(0; -2; -3).$$

1. a. Démontrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.
 - b. Démontrer que le vecteur $\vec{n}(2; -1; 1)$ est un vecteur normal au plan (ABC).
 2. Soit (P) le plan dont une équation cartésienne est $x + y - z + 2 = 0$. Démontrer que les plans (ABC) et (P) sont perpendiculaires.
 3. On appelle G le barycentre des points pondérés (A, 1), (B, -1) et (C, 2).
 - a. Démontrer que le point G a pour coordonnées $(2; 0; -5)$.
 - b. Démontrer que la droite (CG) est orthogonale au plan (P).
 - c. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (CG).
 - d. Déterminer les coordonnées du point H, intersection du plan (P) avec la droite (CG).
 4. Démontrer que l'ensemble (S) des points M de l'espace tels que $\|\vec{MA} - \vec{MB} + 2\vec{MC}\| = 12$ est une sphère dont on déterminera les éléments caractéristiques.
 5. Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.
- Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de l'intersection du plan (P) et de la sphère (S).

Correction

1. a. On a $\vec{AB}(-4; -4; 4)$ et $\vec{AC}(-1; -4; -2)$; il est clair alors que $\vec{AB}(-4; -4; 4)$ et $\vec{AC}(-1; -4; -2)$ ne sont pas colinéaires ; les points A, B et C ne sont donc pas alignés.
- b. $\vec{n} \cdot \vec{AB} = 2 \times (-4) + (-1) \times (-4) + 1 \times 4 = 0 \Rightarrow \vec{n} \perp \vec{AB}$; $\vec{n} \cdot \vec{AC} = 2 \times (-1) + (-1) \times (-4) + 1 \times (-2) = 0 \Rightarrow \vec{n} \perp \vec{AC}$.

Donc $\vec{n}(2; -1; 1)$ est orthogonal à deux vecteurs directeurs du plan (ABC), c'est donc un vecteur normal au plan (ABC).

2. Les plans (ABC) et (P) sont perpendiculaires : $\vec{n}(2; -1; 1)$ est un vecteur normal au plan (ABC) ; $\vec{n}'(1; 1; -1)$ est un vecteur normal au plan (P) ; $\vec{n} \cdot \vec{n}' = 2 \times 1 + (-1) \times 1 + 1 \times (-1) = 0 \Rightarrow \vec{n} \perp \vec{n}'$ donc (ABC) $\perp$ (P).

$$3. a. G \text{ a pour coordonnées : } \begin{cases} x = \frac{x_A - x_B + 2x_C}{2} = \frac{1 - 3 + 0}{2} = -1 \\ y = \frac{y_A - y_B + 2y_C}{2} = \frac{2 - (-2) - 4}{2} = -1 \\ z = \frac{z_A - z_B + 2z_C}{2} = \frac{-1 - 3 - 6}{2} = -5 \end{cases}$$

- b. $\vec{CG}(2; 2; -2)$ vecteur directeur de (CG) et $\vec{n}'(1; 1; -1)$ vecteur normal à (P) ; puisque $\vec{CG} = 2\vec{n}'$, ces deux vecteurs sont colinéaires et en conséquence, (CG) $\perp$ (P).

$$c. M(x; y; z) \in (CG) \Leftrightarrow \vec{CM} = k\vec{n}' \Leftrightarrow \begin{cases} x - 0 = k \times 1 \\ y - (-2) = k \times 1 \\ z - (-3) = k \times (-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k \\ y = -2 + k \\ z = -3 - k \end{cases}$$

$$d. H(x; y; z) \in (CG) \cap (P) \Leftrightarrow \begin{cases} x = k \\ y = -2 + k \\ z = -3 - k \\ x + y - z + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k \\ y = -2 + k \\ z = -3 - k \\ k + (-2 + k) - (-3 - k) + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = -1 \\ x = -1 \\ y = -3 \\ z = -2 \end{cases}$$

donc on a $H(-1; -3; -2)$.

4. G est le barycentre des points pondérés (A, 1), (B, -1) et (C, 2), $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = (1 + (-1) + 2)\overrightarrow{MG} = 2\overrightarrow{MG}$
d'où $\|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}\| = 12 \Leftrightarrow \|2\overrightarrow{MG}\| = 12 \Leftrightarrow 2 \times MG = 12 \Leftrightarrow GM = 6$.

L'ensemble (S) des points M de l'espace tels que $\|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}\| = 12$ est donc la sphère de centre G et de rayon 6.

5. Distance de G au plan (P) : $d(G; (P)) = \frac{|x_G + y_G - z_G + 2|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \frac{|2 + 0 - (-5) + 2|}{\sqrt{3}} = \frac{9}{\sqrt{3}} = 3\sqrt{3}$; or $3\sqrt{3} < 6$, rayon de

(S), donc (P) et (S) se coupent suivant un cercle (C).

Le centre de (C) est le projeté orthogonal de G sur le plan (P) qui est H (cf. 3.b. et c.) ; le rayon r de (C) est tel que $CH^2 + r^2 = R^2 \Leftrightarrow r^2 = 6^2 - (\sqrt{3})^2 = 6 - 3 = 3 \Rightarrow r = \sqrt{3}$.

2. Exercice 2 (3 points)

Pour chaque question, une seule des réponses est exacte.

Le candidat portera sur sa copie, sans justification, le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie.

Il sera attribué 0,5 point si la réponse est exacte, 0 sinon.

1. Un magasin de matériel informatique vend deux modèles d'ordinateur au même prix et de marques M_1 et M_2 . Les deux ordinateurs ont les mêmes caractéristiques et sont proposés en deux couleurs : noir et blanc.

D'après une étude sur les ventes de ces deux modèles, 70 % des acheteurs ont choisi l'ordinateur M_1 et, parmi eux, 60 % ont préféré la couleur noire. Par ailleurs, 20 % des clients ayant acheté un ordinateur M_2 l'ont choisi de couleur blanche.

On utilise la liste des clients ayant acheté l'un ou l'autre des ordinateurs précédemment cités et on choisit un client au hasard.

a. La probabilité qu'un client choisi au hasard ait acheté un ordinateur M_2 de couleur noire est :

Réponse A : $\frac{3}{5}$	Réponse B : $\frac{4}{5}$	Réponse C : $\frac{3}{50}$	Réponse D : $\frac{6}{25}$
---------------------------	---------------------------	----------------------------	----------------------------

b. La probabilité qu'un client choisi au hasard ait acheté un ordinateur de couleur noire est :

Réponse A : $\frac{21}{50}$	Réponse B : $\frac{33}{50}$	Réponse C : $\frac{3}{5}$	Réponse D : $\frac{12}{25}$
-----------------------------	-----------------------------	---------------------------	-----------------------------

c. Le client a choisi un ordinateur de couleur noire. La probabilité qu'il soit de marque M_2 est :

Réponse A : $\frac{4}{11}$	Réponse B : $\frac{6}{25}$	Réponse C : $\frac{7}{11}$	Réponse D : $\frac{33}{50}$
----------------------------	----------------------------	----------------------------	-----------------------------

2. Une urne contient 4 boules jaunes, 2 boules rouges et 3 boules bleues. Les boules sont indiscernables au toucher.

L'expérience consiste à tirer au hasard et simultanément 3 boules de l'urne.

a. La probabilité d'obtenir trois boules de même couleur est :

Réponse A : $\frac{11}{81}$	Réponse B : $\frac{2}{7}$	Réponse C : $\frac{5}{84}$	Réponse D : $\frac{4}{63}$
-----------------------------	---------------------------	----------------------------	----------------------------

b. La probabilité d'obtenir trois boules de trois couleurs différentes est :

Réponse A : $\frac{2}{7}$	Réponse B : $\frac{1}{7}$	Réponse C : $\frac{1}{21}$	Réponse D : $\frac{79}{84}$
---------------------------	---------------------------	----------------------------	-----------------------------

c. On répète plusieurs fois l'expérience, de manière indépendante, en remettant à chaque fois les trois boules dans l'urne. Le nombre minimal d'expériences à réaliser pour que la probabilité de l'évènement « obtenir au moins une fois trois boules jaunes » soit supérieure ou égale à 0,99 est :

Réponse A : 76	Réponse B : 71	Réponse C : 95	Réponse D : 94
----------------	----------------	----------------	----------------

Correction

1. Représentation des données à l'aide :

- D'un tableau à double entrée

	M ₁	M ₂	Total
Noir	42%	24%	66%
Blanc	28%	6%	34%
Total	70%	30%	100%

- D'un arbre pondéré :

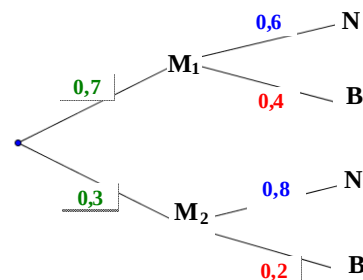
a. La probabilité qu'un client choisi au hasard ait acheté un ordinateur M₂ de couleur noire est :

$$P(M_2 \cap N) = 0,24 = \frac{6}{25} \quad \text{réponse D}$$

b. La probabilité qu'un client choisi au hasard ait acheté un ordinateur de couleur noire est : $P(N) = 0,66 = \frac{33}{50}$

réponse B

c. Le client a choisi un ordinateur de couleur noire.



La probabilité qu'il soit de marque M₂ est : $P_N(M_2) = \frac{24}{66} = \frac{4}{11}$ ou $P_N(M_2) = \frac{P(M_2 \cap N)}{P(N)} = \frac{0,24}{0,66} = \frac{4}{11}$ réponse

A

2. a. Situation d'équiprobabilité avec $\binom{3}{9} = 84$ cas possibles et $\binom{4}{3} + \binom{3}{3} = 4 + 1 = 5$ cas favorables d'où : $p = \frac{5}{84}$

réponse A

b. Cette fois, $\binom{4}{1} \times \binom{2}{1} \times \binom{3}{1} = 4 \times 2 \times 3 = 24$ cas favorables d'où : $p = \frac{24}{84} = \frac{2}{7}$ réponse A

c. E : « obtenir boules jaunes » : $\binom{4}{3} = 4$ cas favorables d'où : $p(E) = \frac{4}{21} = \frac{1}{21}$;

F : « ne pas obtenir trois boules jaunes lors de n tirages » :

$$p(F) = P(\bar{E} \cap \bar{E} \cap \dots \cap \bar{E}) = P(\bar{E})^n = (1 - p(E))^n = \left(\frac{20}{21}\right)^n ;$$

G : « obtenir au moins une fois trois boules jaunes lors de n tirages » : $G = \bar{F} \Rightarrow p(G) = 1 - p(F) = 1 - \left(\frac{20}{21}\right)^n$.

Le nombre minimal d'expériences à réaliser pour que la probabilité de l'évènement G : « obtenir au moins une fois trois boules jaunes » soit supérieure ou égale à 0,99 est :

$$p(G) \geq 0,99 \Leftrightarrow 1 - \left(\frac{20}{21}\right)^n \geq 0,99 \Leftrightarrow 0,01 \geq \left(\frac{20}{21}\right)^n \Leftrightarrow \ln 0,01 \geq n \ln \left(\frac{20}{21}\right) \Leftrightarrow n \geq \frac{\ln 0,01}{\ln \frac{20}{21}} \Leftrightarrow n \geq 95 \quad \text{réponse A}$$

3. Exercice 3 (5 points, non spécialistes)

Partie A : Restitution organisée de connaissances

On suppose connu le résultat suivant : quels que soient les nombres complexes non nuls z et z',

$$\arg(z \times z') = \arg(z) + \arg(z') \text{ à } 2\pi \text{ près.}$$

Démontrer que, quels que soient les nombres complexes non nuls z et z', on a : $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')$ à 2π près.

Partie B

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal direct (O ; $\vec{u}, \vec{v}$), on considère les points A et B d'affixes respectives : $z_A = 1 - i$ et $z_B = 2 + \sqrt{3} + i$.

1. Déterminer le module et un argument de z_A .

2. a. Écrire $\frac{z_B}{z_A}$ sous forme algébrique.

b. Montrer que $\frac{z_B}{z_A} = (1 + \sqrt{3})e^{i\frac{\pi}{3}}$.

c. En déduire la forme exponentielle de z_B .

3. On note B_1 l'image du point B par la rotation r de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{6}$.

a. Déterminer l'affixe du point B_1 .

b. En déduire que le point B_1 est le symétrique du point B par rapport à l'axe $(O; \vec{u})$.

Soit M un point du plan. On note M_1 l'image du point M par la rotation r et M' le symétrique du point M_1 par rapport à l'axe $(O; \vec{u})$.

On désigne par (E) l'ensemble des points M du plan tels que $M' = M$.

a. Montrer que les points O et B appartiennent à l'ensemble (E).

b. Soit M un point distinct du point O.

Son affixe z est égale à $\rho e^{i\theta}$ où ρ est un réel strictement positif et θ un nombre réel.

Montrer que l'affixe z' du point M' est égale à $\rho e^{i(\frac{\pi}{6} - \theta)}$ puis déterminer l'ensemble des valeurs du réel θ telles que M appartienne à l'ensemble (E).

c. Déterminer l'ensemble (E).

Correction

Partie A

$$\arg(1) = \arg\left(\frac{z}{z}\right) = \arg\left(z \times \frac{1}{z}\right) \stackrel{\equiv}{=} \arg(z) + \arg\left(\frac{1}{z}\right) \Rightarrow \arg\left(\frac{1}{z}\right) = \arg(1) - \arg(z) = 0 - \arg(z) = -\arg(z)$$

$$\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg\left(z \times \frac{1}{z'}\right) \stackrel{\equiv}{=} \arg(z) + \arg\left(\frac{1}{z'}\right) \stackrel{\equiv}{=} \arg(z) - \arg(z') \text{ à } 2\pi \text{ près..}$$

Partie B

1. Le module et un argument de z_A : $z_A = 1 - i = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \sqrt{2} \left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \right) = \sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{4}}$ donc :

$$|z_A| = \sqrt{2} \text{ et } \arg(z_A) = -\frac{\pi}{4}.$$

$$2. a. \frac{z_B}{z_A} = \frac{2 + \sqrt{3} + i}{1 - i} = \frac{(2 + \sqrt{3} + i)(1 + i)}{1^2 + (-1)^2} = \frac{(1 + \sqrt{3}) + i(3 + \sqrt{3})}{2} = \frac{1 + \sqrt{3}}{2} + i \frac{3 + \sqrt{3}}{2}.$$

$$b. (1 + \sqrt{3})e^{i\frac{\pi}{3}} = (1 + \sqrt{3}) \left(\cos\frac{\pi}{3} + i \sin\frac{\pi}{3} \right) = (1 + \sqrt{3}) \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{1 + \sqrt{3}}{2} + i \frac{3 + \sqrt{3}}{2} = \frac{z_B}{z_A}.$$

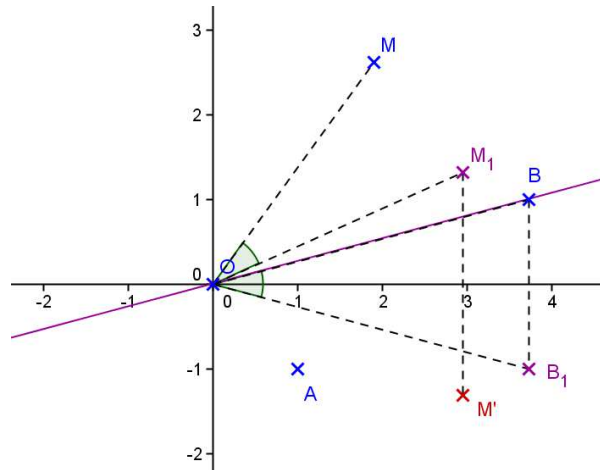
$$c. \frac{z_B}{z_A} = (1 + \sqrt{3})e^{i\frac{\pi}{3}} \Leftrightarrow z_B = (1 + \sqrt{3})e^{i\frac{\pi}{3}} \times z_A = (1 + \sqrt{3})e^{i\frac{\pi}{3}} \times \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}} = (\sqrt{2} + \sqrt{6})e^{i(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4})} = (\sqrt{2} + \sqrt{6})e^{i\frac{\pi}{12}}.$$

3. a. r a pour écriture complexe $z' - z_0 = e^{-i\frac{\pi}{6}}(z - z_0) \Leftrightarrow z' = e^{-i\frac{\pi}{6}}z$ d'où

$$B_1 = r(B) \Leftrightarrow z_{B_1} = e^{-i\frac{\pi}{6}}z_B = e^{-i\frac{\pi}{6}} \times (\sqrt{2} + \sqrt{6})e^{i\frac{\pi}{12}} = (\sqrt{2} + \sqrt{6})e^{-i\frac{\pi}{12}}.$$

b. $z_{B_1} = \overline{z_B}$ donc B_1 est bien le symétrique du point B par rapport à l'axe $(O; \vec{u})$.

4. a. $O_1 = r(O) = O$ et $O' = s(O_1) = s(O) = O$ donc $O \in (E)$; $B_1 = r(B)$ et $B' = s(B_1) = B$ (d'après 3.b.), $B \in (E)$.



b. $M_1 = r(M) \Leftrightarrow z_1 = e^{-i\frac{\pi}{6}} z$ (cf 3.a.) et $M' = s(M_1) \Leftrightarrow z' = \overline{z_1}$, d'où

$$z' = \overline{z_1} = e^{-i\frac{\pi}{6}} \times z = e^{i\frac{\pi}{6}} \times \overline{z} = e^{i\frac{\pi}{6}} \times \overline{\rho e^{i\theta}} = e^{i\frac{\pi}{6}} \times \rho e^{-i\theta} = \rho e^{i(\frac{\pi}{6} - \theta)}.$$

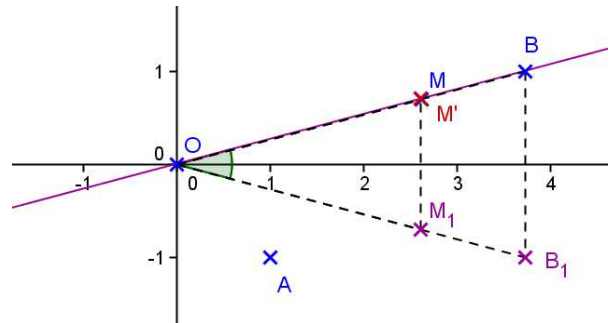
L'ensemble des valeurs du réel θ telles que M appartienne à l'ensemble (E) :

$$M \in (E) \Leftrightarrow M = M' \Leftrightarrow z' = z \Leftrightarrow \rho e^{i\theta} = \rho e^{i(\frac{\pi}{6} - \theta)} \Leftrightarrow \begin{cases} \rho = \rho \\ \theta = \frac{\pi}{6} - \theta + 2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{12} + k\pi.$$

c. Si $z = 0$, $M = O$; sinon

$$M(z) \in (E) \Leftrightarrow z = \rho e^{i\frac{\pi}{12}} \text{ ou } z = \rho e^{-i\frac{11\pi}{12}} \text{ avec } \rho \in \mathbb{R}^+ ;$$

(E) est donc la droite (OB).



4. Exercice 3 (5 points, spécialistes)

Partie A : Restitution organisée de connaissances

On se place dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal direct.

Prérequis : l'écriture complexe d'une similitude directe est de la forme $z' = az + b$ où a et b sont deux nombres complexes tels que $a \neq 0$.

Démontrer que si A, B, A' et B' sont quatre points du plan tels que $A \neq B$ et $A' \neq B'$, alors il existe une unique similitude directe transformant A en A' et B en B'.

Partie B

On considère le triangle rectangle isocèle ABC tel que $(\overline{AB}; \overline{AC}) = \frac{\pi}{2} [2\pi]$. On note D le symétrique de A par rapport au point C. On désigne par s la similitude directe transformant D en C et C en B.

1. Déterminer le rapport et l'angle de la similitude s .

2. On appelle Ω le centre de la similitude s .

a. En utilisant la relation $\overline{DC} = \overline{\Omega C} - \overline{\Omega D}$, démontrer que $DC^2 = \Omega D^2$.

b. En déduire la nature du triangle .

3. On pose $\sigma = s \circ s$.

a. Quelle est la nature de la transformation σ ? Préciser ses éléments caractéristiques.

b. Déterminer l'image du point D par la transformation σ .

4. Démontrer que le quadrilatère $AD\Omega B$ est un rectangle.

5. Dans cette question, le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(A; \vec{u}, \vec{v})$, choisi de manière à ce que les points A, B, C et D aient comme affixes respectives 0, 1, i et $2i$.

a. Démontrer que l'écriture complexe de la similitude s est : $z' = (1+i)z + 2 - i$ où z et z' désignent respectivement les affixes d'un point M et de son image M' par s .

b. On note x et x' , y et y' les parties réelles et les parties imaginaires de z et z' .

Démontrer que $\begin{cases} x' = x - y + 2 \\ y' = x + y - 1 \end{cases}$.

c. Soit J le point d'affixe $1+3i$. Existe-t-il des points M du plan dont les coordonnées sont des entiers relatifs et tels que $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AJ} = 0$, M' désignant l'image du point M par s ?

Correction

5. Exercice 4 (7 points)

Soit f la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = x + e^{-x}$. On note (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Partie A

1. Étudier les variations de la fonction f sur $[0; +\infty[$.

2. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

3. Montrer que (C) admet une asymptote oblique dont on précisera une équation.

Partie B

On considère la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ à termes positifs définie par : $u_1 = 0$ et, pour tout entier naturel n non nul, $u_{n+1} = f(u_n) = u_n + e^{-u_n}$.

1. Démontrer que, pour tout réel x positif, $\ln(1+x) \leq x$. On pourra étudier la fonction g définie sur $[0; +\infty[$ par $g(x) = x - \ln(1+x)$.

2. En déduire que, pour tout entier naturel n non nul, $\ln(n+1) \leq \ln(n) + \frac{1}{n}$.

3. Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, $f(\ln(n)) = \ln(n) + \frac{1}{n}$.

4. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n non nul, $\ln(n) \leq u_n$.

5. En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n \geq 1}$.

Dans la suite de l'exercice, on admet que, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, $u_n \leq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n-1}$.

6. a. Démontrer que, pour tout entier k supérieur ou égal à 2, on a : $\frac{1}{k} \leq \int_{k-1}^k \frac{1}{x} dx$.

b. En déduire que, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on a : $u_n \leq 1 + \ln(n-1)$.

7. Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on a montré que $\ln(n) \leq u_n \leq 1 + \ln(n-1)$.

Démontrer que la suite $\left(\frac{u_n}{\ln(n)}\right)_{n \geq 1}$ converge vers 1.

Correction

Partie A

1. f est dérivable sur $[0; +\infty[$ et $f'(x) = 1 + (-e^{-x}) = 1 - e^{-x}$; $f'(x) > 0 \Leftrightarrow 1 - e^{-x} > 0 \Leftrightarrow 1 > e^{-x} \Leftrightarrow -x < 0 \Leftrightarrow x > 0$;

La fonction f est donc strictement croissante sur $[0; +\infty[$.

2. La limite de f en $+\infty$: $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = \lim_{X \rightarrow -\infty} e^X = 0$ d'où, par somme, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$ donc (D) est asymptote oblique à (C); $f(x) - x = e^{-x} > 0$ donc (D) est au-dessous de (C).

Partie B

1. $g'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x} \geq 0$; g est croissante sur $[0; +\infty[$ donc

$$g(x) \geq g(0) \Leftrightarrow x - \ln(1+x) \geq 0 \Leftrightarrow \ln(1+x) \leq x \text{ (pour } x \geq 0 \text{)}.$$

2. $\frac{1}{n} \geq 0$, $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n} \Leftrightarrow \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \leq \frac{1}{n} \Leftrightarrow \ln(n+1) - \ln(n) \leq \frac{1}{n} \Leftrightarrow \ln(n+1) \leq \ln(n) + \frac{1}{n}$.
 $\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$ si $\begin{cases} a > 0 \\ b > 0 \end{cases}$

3. $f(x) = x + e^{-x} \Rightarrow f(\ln(n)) = \ln(n) + e^{-\ln(n)} = \ln(n) + \frac{1}{e^{\ln(n)}} = \ln(n) + \frac{1}{n}$.

4. Appelons P_n la propriété : « $\ln(n) \leq u_n$ » ;

Initialisation : $\ln 1 = 0$ et $u_1 = 0$ donc on a bien : $\ln(1) \leq u_1$, soit P_1 est vraie (1)

Hérédité : Supposons que, pour un n donné, P_n soit vraie, à savoir : $\ln(n) \leq u_n$; f étant croissante sur $[0; +\infty[$, on en déduit que $f(\ln(n)) \leq f(u_n) \Leftrightarrow f(\ln(n)) \leq u_{n+1}$; $f(\ln(n)) = \ln(n) + \frac{1}{n} > \ln(n+1)$ d'après 3. et 2, d'où il résulte $\ln(n+1) \leq u_{n+1}$. Ainsi la propriété P_{n+1} est vraie.

5. $\ln(n) \leq u_n$; or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln n = +\infty$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

6. a. La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est décroissante sur $]0; +\infty[$ donc pour $1 \leq x \leq k$, on a : $\frac{1}{k} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{k-1}$; d'après l'inégalité de la moyenne, on en déduit que :

$$(k - (k-1)) \times \frac{1}{k} \leq \int_{k-1}^k \frac{1}{x} dx \leq (k - (k-1)) \times \frac{1}{k-1} \Leftrightarrow \frac{1}{k} \leq \int_{k-1}^k \frac{1}{x} dx \leq \frac{1}{k-1} \Rightarrow \frac{1}{k} \leq \int_{k-1}^k \frac{1}{x} dx.$$

b. D'après le résultat précédent appliqué successivement à $k = 2, k = 3, \dots, k = n-1$, il vient :

$$\frac{1}{2} \leq \int_1^2 \frac{1}{x} dx, \frac{1}{3} \leq \int_2^3 \frac{1}{x} dx, \dots, \frac{1}{n-1} \leq \int_{n-2}^{n-1} \frac{1}{x} dx.$$

Puis en ajoutant membre à membre ces inégalités :

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n-1} \leq \int_1^2 \frac{1}{x} dx + \int_2^3 \frac{1}{x} dx + \dots + \int_{n-2}^{n-1} \frac{1}{x} dx \Leftrightarrow \sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{k} \leq \sum_{k=2}^{n-1} \int_{k-1}^k \frac{1}{x} dx.$$

Grâce à la relation de Chasles : $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \leq \int_1^{n-1} \frac{1}{x} dx \Leftrightarrow \sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{k} \leq \int_1^{n-1} \frac{1}{x} dx$;

$$\int_1^{n-1} \frac{1}{x} dx = [\ln x]_1^{n-1} = \ln(n-1) \text{ d'où } \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n-1} \leq \ln(n-1) \Leftrightarrow \sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{k} \leq \ln(n-1).$$

Comme $u_n \leq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n-1} \Leftrightarrow u_n \leq 1 + \sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{k}$, on en déduit que : $u_n \leq 1 + \ln(n-1)$.

7. La suite $\left(\frac{u_n}{\ln(n)}\right)_{n \geq 2}$ converge vers 1 : $\ln(n) \leq u_n \leq 1 + \ln(n-1) \Leftrightarrow_{\ln n > 0 \text{ car } n > 1} 1 \leq \frac{u_n}{\ln(n)} \leq \frac{1 + \ln(n-1)}{\ln(n)}$;

$$\frac{1 + \ln(n-1)}{\ln(n)} = \frac{1 + \ln\left(n\left(1 - \frac{1}{n}\right)\right)}{\ln(n)} = \frac{1 + \ln(n) + \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)}{\ln(n)} = 1 + \frac{\ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)}{\ln(n)} ;$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln \left(1 - \frac{1}{n} \right) = 0 \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln n = +\infty, \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 + \ln \left(1 - \frac{1}{n} \right)}{\ln(n)} = 0 \text{ d'où } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 + \ln(n-1)}{\ln(n)} = 1 ;$$

Donc, d'après le théorème des gendarmes, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{\ln n} = 1$.

Remarque : On dit que la suite (u_n) est équivalente à la suite $(\ln n)$.