

Amérique du Sud

1. Exercice 1

6 points

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ orthonormal. On prend 1 cm comme unité.

Partie A - Restitution organisée de connaissances

Soit D le point de coordonnées (x_D, y_D, z_D) et P le plan d'équation $ax + by + cz + d = 0$, où a, b, c et d sont des réels qui ne sont pas tous nuls.

Démontrer que la distance du point D au plan P est donnée par : $d(D, P) = \frac{|ax_D + by_D + cz_D + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$.

Partie B

On considère les points A de coordonnées $(3; -2; 2)$, B de coordonnées $(6; -2; -1)$, C de coordonnées $(6; 1; 5)$ et D de coordonnées $(4; 0; -1)$.

1. Démontrer que le triangle ABC est rectangle. En déduire l'aire du triangle ABC .

2. Vérifier que le vecteur $\vec{n}$ de coordonnées $(1; -2; 1)$ est normal au plan (ABC) . Déterminer une équation du plan (ABC) .

3. Calculer la distance du point D au plan (ABC) . Déterminer le volume du tétraèdre $ABCD$.

Partie C

Soit Q le plan d'équation $x - 2y + z - 5 = 0$.

1. Déterminer la position relative des deux plans Q et (ABC) .

2. Q coupe les droites (DA) , (DB) et (DC) respectivement en E , F et G .

Déterminer les coordonnées de E et montrer que E appartient au segment $[DA]$.

3. Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

Déterminer le volume du tétraèdre $EFGD$.

2. Exercice 2

5 points

Le but de cet exercice est de déterminer une valeur approchée à 10^{-2} près de l'intégrale : $I = \int_0^1 \frac{e^{-x}}{2-x} dx$.

1. a. Étudier les variations de la fonction $f : x \rightarrow f(x) = \frac{e^{-x}}{2-x}$ sur l'intervalle $[0; 1]$.

b. Montrer que, pour tout réel x de l'intervalle $[0; 1]$, on a $\frac{1}{e} \leq f(x) \leq \frac{1}{2}$.

2. Soit J et K les intégrales définies par $J = \int_0^1 (2+x)e^{-x} dx$ et $K = \int_0^1 x^2 f(x) dx$.

a. Au moyen d'une intégration par parties, prouver que $J = 3 - \frac{4}{e}$.

b. Utiliser un encadrement de $f(x)$ obtenu précédemment pour démontrer que $\frac{1}{3e} \leq K \leq \frac{1}{6}$.

c. Démontrer que $J + K = 4I$.

d. Déduire de tout ce qui précède un encadrement de I , puis donner une valeur approchée à 10^{-2} près de I .

3. Exercice 3

4 points

On considère un questionnaire comportant cinq questions.

Pour chacune des cinq questions posées, trois propositions de réponses sont faites (A, B et C), une seule d'entre elles étant exacte.

Un candidat répond à toutes les questions posées en écrivant un mot réponse de cinq lettres.

Par exemple, le mot « BBAAC » signifie que le candidat a répondu B aux première et deuxième questions, A aux troisième et quatrième questions et C à la cinquième question.

1. a. Combien y-a-t-il de mots-réponses possibles à ce questionnaire ?

b. On suppose que le candidat répond au hasard à chacune des cinq questions de ce questionnaire.

Calculer la probabilité des événements suivants :

E : « le candidat a exactement une réponse exacte ».

F : « le candidat n'a aucune réponse exacte ».

G : « le mot-réponse du candidat est un palindrome » (On précise qu'un palindrome est un mot pouvant se lire indifféremment de gauche à droite ou de droite à gauche : par exemple, « BACAB » est un palindrome).

2. Un professeur décide de soumettre ce questionnaire à ses 28 élèves en leur demandant de répondre au hasard à chacune des cinq questions de ce questionnaire. On désigne par X le nombre d'élèves dont le mot-réponse ne comporte aucune réponse exacte.

a. Justifier que la variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres $n = 28$ et $p = \frac{32}{243}$.

b. Calculer la probabilité, arrondie à 10^{-2} , qu'au plus un élève ne fournisse que des réponses fausses.

4. Exercice 4 (non spécialistes, corrigé)

5 points

Dans le plan muni d'un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A et B d'affixes respectives 2 et (-2) et on définit l'application f qui à tout point M d'affixe z et différent de A associe le

point M' d'affixe $z' = \frac{\bar{z}(z-2)}{z-2}$.

1. a. Déterminer l'affixe du point P' image par f du point P d'affixe $1 + i$.

b. Montrer que les droites (AP) et (BP') sont parallèles.

c. Établir que les droites (AP) et (PP') sont perpendiculaires.

2. Déterminer l'ensemble des points invariants par f (c'est à dire l'ensemble des points M tels que $M' = M$).

On cherche à généraliser les propriétés 1. b. et 1. c. pour obtenir une construction de l'image M' d'un point M quelconque du plan.

3. a. Montrer que pour tout nombre complexe z , le nombre $(z-2)(\bar{z}-2)$ est réel.

b. En déduire que pour tout nombre complexe distinct de 2, $\frac{z'+2}{z-2}$ est réel.

c. Montrer que les droites (AM) et (BM') sont parallèles.

4. Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, sera prise en compte dans l'évaluation.

Soit M un point quelconque non situé sur la droite (AB) . Généraliser les résultats de la question 1.c.

5. Soit M un point distinct de A . Déduire des questions précédentes une construction du point M' image de M par f . Réaliser une figure pour le point Q d'affixe $3 - 2i$.

Correction

$$1. a. z_{P'} = \frac{\overline{z_P}(z_P - 2)}{\overline{z_P} - 2} = \frac{(1-i)(-1+i)}{-1-i} = \frac{(1-i)(-1+i)(-1+i)}{(-1)^2 + (-1)^2} = \frac{(1-i)(1-2i-1)}{2} = -i(1-i) = -1-i.$$

b. $\overline{AP}$ a pour affixe $z_{\overline{AP}} = z_P - z_A = 1+i-2 = -1+i$; $\overline{BP'}$ a pour affixe $z_{\overline{BP'}} = z_{P'} - z_B = -1-i+2 = 1-i$: $z_{\overline{BP'}} = -z_{\overline{AP}}$, les droites sont parallèles.

$$c. \frac{z_{P'} - z_P}{z_P - z_A} = \frac{-1-i-1-i}{-1+i} = \frac{(-2-2i)(-1-i)}{2} = \frac{\cancel{2}(-1-i)^2}{\cancel{2}} = 1+2i-1 = 2i.$$

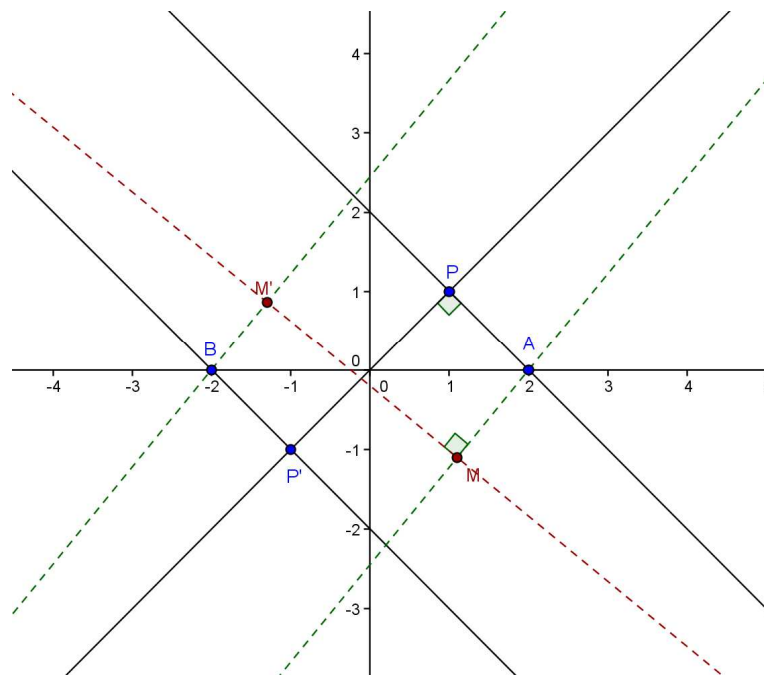
Comme $\frac{z_{P'} - z_P}{z_P - z_A}$ est un imaginaire pur et qu'un argument de $\frac{z_{P'} - z_P}{z_P - z_A}$ est une mesure de $(\overline{AP}, \overline{PP'})$, on en déduit que les vecteurs $\overline{AP}$ et $\overline{PP'}$ sont orthogonaux, les droites sont perpendiculaires.

2. $M' = M$ équivaut à $z' = z$.

$$z' = z \Leftrightarrow \frac{\overline{z}(z-2)}{\overline{z}-2} = z \Leftrightarrow \overline{z}(z-2) = z(\overline{z}-2) \Leftrightarrow -2\overline{z} = -2z \Leftrightarrow \overline{z} = z \Leftrightarrow z \text{ est un réel.}$$

L'ensemble des points invariants par f est l'axe des réels.

3. a. $(z-2)(\overline{z}-2) = z\overline{z} - 2z - 2\overline{z} + 4 = z\overline{z} - 2(z + \overline{z}) + 4$. Or pour tout nombre complexe z , $z\overline{z} = |z|^2$ et $z + \overline{z} = 2\operatorname{Re}(z)$, d'où $(z-2)(\overline{z}-2) = |z|^2 - 4\operatorname{Re}(z) + 4$; comme $|z|$ et $\operatorname{Re}(z)$ sont des réels, on en déduit que, pour tout nombre complexe z , le nombre $(z-2)(\overline{z}-2)$ est réel.



$$b. \frac{z'+2}{z-2} = \frac{\frac{\overline{z}(z-2)}{\overline{z}-2} + 2}{z-2} = \frac{\frac{\overline{z}(z-2) + 2(\overline{z}-2)}{\overline{z}-2}}{z-2} = \frac{\overline{z}\overline{z} + 4}{(z-2)(\overline{z}-2)} = \frac{|z|^2 + 4}{(z-2)(\overline{z}-2)}.$$

D'après la question précédente, $(z-2)(\overline{z}-2)$ et $|z|^2$ sont des réels. Par conséquent, $\frac{z'+2}{z-2}$ est réel.

Γ_1 désigne le cercle de diamètre $[AI]$ et Γ_2 désigne le cercle de diamètre $[BK]$.

Partie A

1. Déterminer le rapport et l'angle de la similitude directe s telle que $s(A) = I$ et $s(B) = K$.
2. Montrer que les cercles Γ_1 et Γ_2 se coupent en deux points distincts : le point J et le centre Ω de la similitude directe s .
3. a. Déterminer les images par s des droites (AC) et (BC) . En déduire l'image du point C par s .
b. Soit E l'image par s du point I . Démontrer que E est le milieu du segment $[ID]$.
4. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, sera prise en compte dans l'évaluation.*

Démontrer que les points A , Ω et E sont alignés. (On pourra considérer la transformation $t = s \circ s$).

Partie B

Désormais, on considère que le côté du carré mesure 10 unités et on se place dans le repère orthonormé direct $\left(A ; \frac{1}{10} \overline{AB}, \frac{1}{10} \overline{AD} \right)$.

1. Donner les affixes des points A , B , C et D .
2. Démontrer que la similitude directe s a pour écriture complexe $z' = \frac{1}{2} iz + 5 + 5i$.
3. Calculer l'afixe ω du centre Ω de s .
4. Calculer l'afixe z_E du point E et retrouver l'alignement des points A , Ω et E .
5. Démontrer que les droites (AE) , (CL) et (DJ) sont concourantes au point Ω .