

Nouvelle Calédonie

Correction

1. Exercice 1

4 points

Pour tout cet exercice, l'espace est muni d'un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

1. Question de cours

Établir l'équation cartésienne d'un plan dont on connaît un vecteur normal $\vec{n}(a, b, c)$ et un point $M_0(x_0, y_0, z_0)$.

2. On considère les points $A(1 ; 2 ; -3)$, $B(-3 ; 1 ; 4)$ et $C(2 ; 6 ; -1)$.

a. Montrer que les points A , B et C déterminent un plan.

b. Vérifier qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est $2x - y + z + 3 = 0$.

c. Soit I le point de coordonnées $(-5 ; 9 ; 4)$. Déterminer un système d'équations paramétriques de la droite D passant par I et perpendiculaire au plan (ABC) .

d. Déterminer les coordonnées du point J , intersection de la droite D et du plan (ABC) .

e. En déduire la distance du point I au plan (ABC) .

2. Exercice 2

4 points

Pour chaque question une seule des quatre propositions est exacte. Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

Une réponse exacte rapporte les points attribués à la question, une réponse inexacte enlève la moitié des points attribués à la question, l'absence de réponse est comptée 0 point. Si le total est négatif la note est ramenée à 0.

A. Un sac contient 3 boules blanches, 4 boules noires et 1 boule rouge, indiscernables au toucher. On tire, au hasard, successivement, trois boules du sac, en remettant chaque boule tirée dans le sac avant le tirage suivant.

Question 1 : La probabilité de tirer trois boules noires est :

a. $\frac{\binom{4}{3}}{\binom{8}{3}}$	b. $\frac{9}{8}$	c. $\left(\frac{1}{2}\right)^3$	d. $\frac{4 \times 3 \times 2}{8 \times 7 \times 6}$
--	------------------	---------------------------------	--

Question 2 : Sachant que Jean a tiré 3 boules de la même couleur, la probabilité qu'il ait tiré 3 boules rouges est :

a. 0	b. $\left(\frac{1}{8}\right)^3$	c. $\frac{23}{128}$	d. $\frac{1}{92}$
------	---------------------------------	---------------------	-------------------

B. Soit f la fonction définie sur $[0 ; 1]$ par $f(x) = x + m$ où m est une constante réelle.

Question 3 : f est une densité de probabilité sur l'intervalle $[0 ; 1]$ lorsque :

a. $m = -1$	b. $m = \frac{1}{2}$	c. $m = e^{\frac{1}{2}}$	d. $m = e^{-1}$
-------------	----------------------	--------------------------	-----------------

C. La durée de vie en années d'un composant électronique suit une loi exponentielle de paramètre 0,2.

Question 4 : La probabilité que ce composant électronique ait une durée de vie strictement supérieure à 5 ans est :

a. $1 - \frac{1}{e}$	b. $\frac{1}{e}$	c. $\frac{1}{5e}$	d. $\frac{1}{0,2}(e-1)$
----------------------	------------------	-------------------	-------------------------

3. Exercice 3 (spécialistes)

5 points

Pour coder un message, on procède de la manière suivante : à chacune des 26 lettres de l'alphabet, on commence par associer un entier n de l'ensemble $\Omega = \{0 ; 1 ; 2 ; \dots ; 24 ; 25\}$ selon le tableau ci-dessous :

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

a et b étant deux entiers naturels donnés, on associe à tout entier n de Ω le reste de la division euclidienne de $(an + b)$ par 26 ; ce reste est alors associé à la lettre correspondante.

Exemple : pour coder la lettre P avec $a = 2$ et $b = 3$, on procède de la manière suivante :

étape 1 : on lui associe l'entier $n = 15$;

étape 2 : le reste de la division de $2 \times 15 + 3 = 33$ par 26 est 7 ;

étape 3 : on associe 7 à H.

Donc P est codé par la lettre H.

1. Que dire alors du codage obtenu lorsque l'on prend $a = 0$?

2. Montrer que les lettres A et C sont codées par la même lettre lorsque l'on choisit $a = 13$.

3. Dans toute la suite de l'exercice, on prend $a = 5$ et $b = 2$.

a. On considère deux lettres de l'alphabet associées respectivement aux entiers n et p . Montrer, que si $5n + 2$ et $5p + 2$ ont le même reste dans la division par 26 alors $n - p$ est un multiple de 26. En déduire que $n = p$.

b. Coder le mot AMI.

4. On se propose de décoder la lettre E.

a. Montrer que décoder la lettre E revient à déterminer l'élément n de Ω tel que $5n - 26y = 2$, où y est un entier.

b. On considère l'équation $5x - 26y = 2$, avec x et y entiers relatifs.

i. Donner une solution particulière de l'équation $5x - 26y = 2$.

ii. Résoudre alors l'équation $5x - 26y = 2$.

iii. En déduire qu'il existe un unique couple $(x ; y)$ solution de l'équation précédente, avec $0 \leq x \leq 25$.

c. Décoder alors la lettre E.

4. Exercice 4

$$u_n = \sum_{k=n}^{k=2n} \frac{1}{k} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n}.$$

PARTIE A

$$1. u_{n+1} - u_n = \left(\frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} \right) - \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n} \right) = \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n} \text{ d'où}$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{-3n-2}{n(2n+2)(2n+1)}.$$

2. La suite (u_n) est décroissante puisque $-3n-2 < 0$.

3. La suite est positive puisque somme de termes positifs ; elle est décroissante et minorée, elle converge bien.

PARTIE B

1. a. $n \leq x \leq n+1 \Leftrightarrow \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{n} \Rightarrow \frac{1}{n+1} \leq \int_n^{n+1} \frac{1}{x} dx \leq \frac{1}{n}.$

b. $\int_n^{n+1} \frac{1}{x} dx = [\ln x]_n^{n+1} = \ln(n+1) - \ln n = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right);$

par ailleurs $\frac{1}{n} - f(n) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n} - \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$ car $\ln \frac{a}{b} = -\ln \frac{b}{a}.$

c. Comme $\frac{1}{n+1} \leq \int_n^{n+1} \frac{1}{x} dx \leq \frac{1}{n}$, on a :

$$\frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n} - f(n) \leq \frac{1}{n} \Leftrightarrow \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} \leq -f(n) \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq f(n) \leq \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}.$$

2. a. Comme

$$0 \leq f(n) \leq \frac{1}{n(n+1)},$$

$$0 \leq f(n+1) \leq \frac{1}{(n+1)(n+2)},$$

...,

$$0 \leq f(2n) \leq \frac{1}{2n(2n+1)},$$

on somme toutes ces inégalités et on obtient :

$$0 \leq f(n) + f(n+1) + \dots + f(2n) \leq \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \dots + \frac{1}{2n(2n+1)} = S_n.$$

b. On a déjà le résultat au 1.c. : $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}$...

c. On remplace donc dans $S_n = \sum_{k=n}^{k=2n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+1} = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n+1}$ car

tous les termes intermédiaires s'éliminent ; $S_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n+1} = \frac{2n+1-n}{n(2n+1)} = \frac{n+1}{n(2n+1)}.$

d. S_n tend vers 0 en $+\infty$; grâce aux « gendarmes » $f(n) + f(n+1) + \dots + f(2n)$ tend également vers 0.

e. $u_n = \sum_{k=n}^{k=2n} \frac{1}{k} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n};$

$$\begin{aligned} f(n) + f(n+1) + \dots + f(2n) &= \frac{1}{n} + \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) + \frac{1}{n+1} + \ln\left(\frac{n+1}{n+2}\right) + \dots + \frac{1}{2n} + \ln\left(\frac{2n}{2n+1}\right) \\ &= \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n} + \ln\left[\left(\frac{n}{n+1}\right)\left(\frac{n+1}{n+2}\right)\dots\left(\frac{2n}{2n+1}\right)\right] \\ &= u_n + \ln\left[\frac{n}{2n+1}\right] = u_n - \ln\left[\frac{2n+1}{n}\right] = u_n - \ln\left[2 + \frac{1}{n}\right]. \end{aligned}$$

Les logarithmes se simplifient car tous les termes du produit à l'intérieur du crochet s'éliminent.

f. On sait déjà que $f(n) + f(n+1) + \dots + f(2n)$ tend vers 0 ; le logarithme tend vers $\ln 2$ donc u_n tend vers $\ln 2$.