

Polynésie

Correction

1. Exercice 1 (3 points)

1. Comme A et B sont indépendants on a $p(A \cap B) = p(A)p(B) = 0,02 \times 0,1$; on en déduit donc que $p(C) = 1 - p(A \cup B) = 1 - [p(A) + p(B) - p(A \cap B)] = 1 - 0,02 - 0,1 + (0,02 \times 0,1) = 0,882$.

2. Il y a $0,02 - 0,002 = 0,018$ chances de tomber sur une montre n'ayant que le défaut a ; de même il y a $0,1 - 0,002 = 0,098$ chances de tomber sur une montre n'ayant que le défaut b ; on a donc $p(D) = 0,018 + 0,098 = 0,116$.

3. X suit une loi binomiale $B(5 ; 0,882)$;

$$p(E) = p(X \geq 4) = p(X = 4) + p(X = 5) = \binom{5}{4} 0,882^4 0,118^1 + \binom{5}{5} 0,882^5 0,118^0 \approx 0,891.$$

2. Exercice 2 (5 points, non spécialistes)

$A(3 ; 1 ; 3)$ et $B(-6 ; 2 ; 1)$. P admet pour équation $x + 2y + 2z = 5$.

1. $\|4\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}\| = 2 \Leftrightarrow \|3\overrightarrow{MG}\| = 2 \Leftrightarrow MG = \frac{2}{3}$ où G est le barycentre de $\{(A, 4) ; (B, -1)\}$. Il s'agit d'une sphère de centre G de rayon $2/3$. Réponse **b**.

2. Il faut que $\overrightarrow{AH}$ soit colinéaire au vecteur normal de P , soit $\vec{n}(1 ; 2 ; 2)$, on a donc en posant x, y et z les

$$\text{coordonnées de } H : \overrightarrow{AH} = k\vec{n} \Leftrightarrow \begin{cases} x-3 = k \\ y-1 = 2k \\ z-3 = 2k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3+k \\ y = 1+2k \\ z = 3+2k \end{cases}.$$

De plus H doit être sur P , on a alors $3+k+2(1+2k)+2(3+2k)=5 \Leftrightarrow 9k+11=5 \Leftrightarrow k=-6/9=-2/3$ d'où

$$\text{en remplaçant, } \begin{cases} x = 3 - 2/3 = 7/3 \\ y = 1 - 4/3 = -1/3 \\ z = 3 - 4/3 = 5/3 \end{cases}. \text{ Réponse c.}$$

3. Il nous faut d'abord calculer la distance de B à P : $d(B, P) = \frac{|-6+2.2+2.1-5|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}} = \frac{5}{3}$; cette distance est supérieure à 1 donc la sphère de centre B de rayon 1 ne coupe pas P . Réponse **c**.

4. Ecrivons les équations paramétriques de D : $\begin{cases} x = 3+t' \\ y = 1+2t', t' \in \mathbb{R} \\ z = 3-t' \end{cases}$; le vecteur directeur de D' est

$\vec{v}(2 ; 1 ; 1)$ qui n'est pas colinéaire à $\vec{u}$, elles ne sont pas parallèles.

$$\text{On fait l'intersection : } \begin{cases} x = 3+t' = 3+2t \\ y = 1+2t' = 3+t \\ z = 3-t' = t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3+t' = 3+6-2t' \Rightarrow 3t' = 6 \\ 1+2t' = 3+3-t' \Rightarrow 3t' = 5 \\ 3-t' = t \end{cases}.$$

C'est impossible donc encore réponse **c**.

5. L'ensemble des points M de l'espace équidistants des points A et B est le plan médiateur de $[AB]$. Le milieu de $[AB]$ a pour coordonnées $(-3/2 ; 3/2 ; 2)$; ces coordonnées marchent dans les deux équations de plan, il faut donc regarder le vecteur $\overrightarrow{AB}$ qui doit être colinéaire au vecteur normal d'un des plans : $\overrightarrow{AB} = (-9 ; 1 ; -2)$ qui est colinéaire à $(9 ; -1 ; 2)$. Réponse **b**.

3. Exercice 2 (5 points, spécialistes)

$$u_0 = 14, u_{n+1} = 5u_n - 6.$$

$$1. u_1 = 5 \cdot 14 - 6 = 64, u_2 = 314, u_3 = 1564 \text{ et } u_4 = 7814.$$

Un coup c'est 64 à la fin lorsque n est impair, un coup c'est 14 à la fin lorsque n est pair.

Notez que pour connaître les deux derniers chiffres d'un nombre il faut pouvoir l'écrire $100A+B$ où A est un entier quelconque et B un entier entre 0 et 99.

$$2. u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6 = 5(5u_n - 6) - 6 = 25u_n - 36 ; \text{ or } 25 \equiv 1(4) \text{ et } 36 \equiv 0(4) \text{ donc } u_{n+2} \equiv 1 \cdot u_n(4) \equiv u_n(4).$$

Comme on a $u_0 = 14 = 2 + 12 \equiv 2(4)$, par récurrence en utilisant le résultat précédent, on aura $u_2 \equiv u_0(4) \equiv 2(4)$, etc. soit $u_{2k} \equiv 2(4)$.

De même $u_1 = 64 \equiv 0(4) \Rightarrow u_3 \equiv 0(4) \Rightarrow \dots \Rightarrow u_{2k+1} \equiv 0(4)$.

$$3. a. \text{ Pour } n = 0 : 2u_0 = 28 = 5^2 + 3, \text{ ok.}$$

$$\text{On suppose que } 2u_n = 5^{n+2} + 3, \text{ alors } u_{n+1} = 5 \frac{5^{n+2} + 3}{2} - 6 \Leftrightarrow 2u_{n+1} = 5 \cdot 5^{n+2} + 15 - 12 = 5^{n+3} + 3 ; \text{ ok.}$$

$$b. 2u_n \equiv 28(100) \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, 2u_n = 28 + 100k ; \text{ soit } 5^{n+2} + 3 = 28 + 100k \Leftrightarrow 25 \cdot 5^n - 25 = 100k \Leftrightarrow 5^n - 1 = k.$$

Comme on peut toujours trouver un entier de la forme $5^n - 1$, c'est vrai.

$$4. \text{ On a pour } n \text{ pair} : 2u_n = 28 + (5^n - 1)100 \Leftrightarrow u_n = 14 + \left(\frac{5^n - 1}{2} \right) 100.$$

$5^n - 1$ est pair, donc divisible par 2, $\frac{5^n - 1}{2}$ est donc un entier K et $u_{2p} = 14 + 100K$, ses deux derniers chiffres sont 14.

Si n est impair, soit $n = 2p + 1$, $u_n = u_{2p+1} = 5u_{2p} - 6 = 5(14 + 100K) - 6 = 64 + 500K = 64 + 100K'$ d'où ses deux derniers chiffres sont 64.

5. Quel est le PGCD de 14 et 64 ? C'est 2. Il faut donc montrer que le PGCD de u_n et u_{n+1} est 2, soit que

$$\frac{u_n}{2} = 50K + 7 \text{ et } \frac{u_{n+1}}{2} = 250K + 32 \text{ sont premiers entre eux, soit qu'il existe } a \text{ et } b \text{ dans } \mathbb{Z} \text{ tels que}$$

$$a \frac{u_n}{2} + b \frac{u_{n+1}}{2} = 1 \Leftrightarrow a(50K + 7) + b(250K + 32) = 1 \Leftrightarrow 50K(a + 5b) + 7a + 32b = 1.$$

Lorsqu'on essaie ainsi ça ne marche pas : les valeurs trouvées pour a et b ne sont pas entières... Par contre on peut remarquer que dans $u_{n+1} = 5u_n - 6$ le PGCD de u_{n+1} et u_n doit également diviser 6 ; c'est donc 1, 2, 3 ou 6. Mais 3 ne divise pas $u_n = 5^{n+2} + 3$ puisque 3 ne divise pas 5 donc ce n'est ni 3 ni 6, il reste 2 puisque u_n est pair (se termine par 14 ou 64).

4. Exercice 3 (7 points)

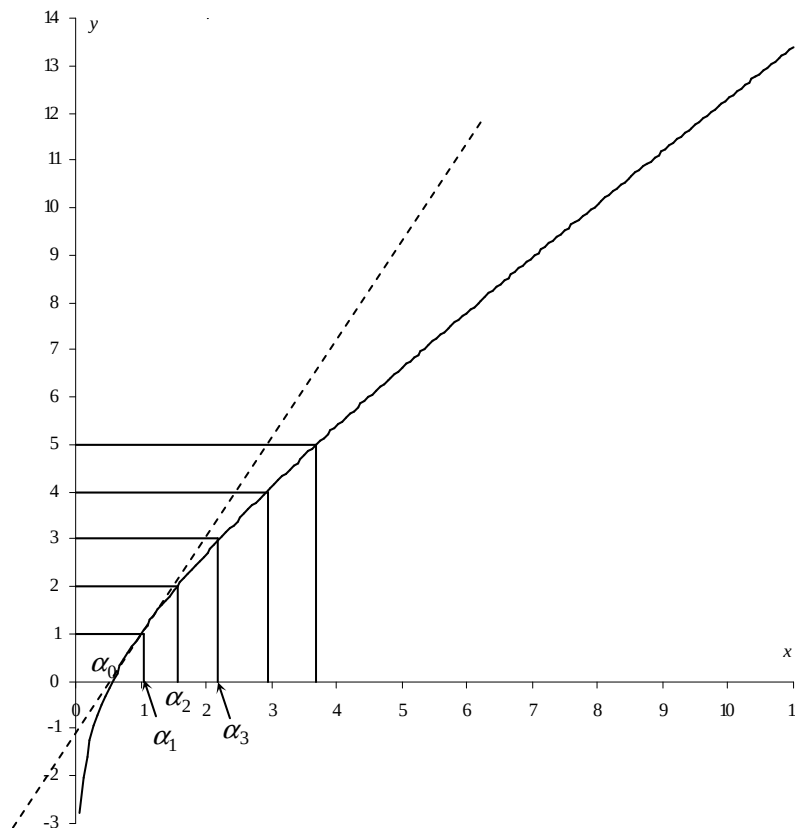
Partie A $f(x) = x + \ln x$.

1. a. En $+\infty$ les deux termes tendent vers $+\infty$ donc f tend vers $+\infty$; en 0^+ $\ln x$ tend vers $-\infty$ donc f également.

b. x est croissante, $\ln$ est croissante, la somme de deux fonctions croissantes est croissante. Sinon on a facilement $f'(x) = 1 + \frac{1}{x} > 0$.

2. a. f est continue, monotone croissante de $\mathbb{R}_+^*$ vers $\mathbb{R}$; elle est donc bijective et toutes les valeurs n entières sont atteintes. A chaque n correspond donc un unique antécédent α_n avec $\alpha_n + \ln \alpha_n = n$.

b. On part des valeurs entières 1, 2, 3, 4 et 5 sur l'axe des ordonnées et on trace.



c. $\alpha_1 : \alpha_1 + \ln \alpha_1 = 1$; cette équation a l'unique solution 1 : $1 + \ln 1 = 1$.

d. Comme f est croissante et que $n+1 > n$, alors les antécédents α_n et α_{n+1} sont rangés dans le même ordre : $\alpha_n \leq \alpha_{n+1} \Leftrightarrow f(\alpha_n) \leq f(\alpha_{n+1}) \Leftrightarrow n \leq n+1$.

3. a. $f'(1) = 1 + \frac{1}{1} = 2$ et $f(1) = 1$ d'où l'équation de $\Delta : y = 2(x-1) + 1 = 2x - 1$.

b. $h(x) = \ln x - x + 1$, $h'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}$ est positif lorsque $x < 1$, négatif lorsque $x > 1$. On a $h(1) = 0$ donc h est croissante avant 1, décroissante après 1 d'où $h(x) \leq h(1) = 0$. La position de Γ par rapport à Δ est donnée par le signe de $f(x) - (2x - 1) = x + \ln x - 2x + 1 = \ln x - x + 1 = h(x)$, donc Γ est toujours en dessous de Δ .

c. Comme $h(x) \leq 0$ pour $x > 1$, ceci est valable pour $\alpha_n : f(\alpha_n) - 2\alpha_n + 1 \leq 0 \Leftrightarrow n - 2\alpha_n + 1 \leq 0 \Leftrightarrow \alpha_n \geq \frac{n+1}{2}$.

4. Comme n tend vers $+\infty$, $\frac{n+1}{2}$ également et α_n également.

Partie B

g continue, strictement croissante sur $]0; +\infty[$ et telle que $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$.

1. Démonstration de cours : une suite croissante non majorée tend vers $+\infty$.

Démonstration par l'absurde : si (u_n) est croissante non majorée et qu'elle tend vers une limite L , alors il arriverait un moment (une valeur N de n) où $u_N < L - \varepsilon$ où ε est un réel positif choisi arbitrairement (aussi petit qu'on le veut) ; si le terme suivant est supérieur à $L - \varepsilon$, la suite ne converge pas vers L et si le terme suivant reste inférieur à L , la suite est majorée. Dans les deux cas il y a contradiction.

Démonstration directe : si (u_n) est non majorée, pour tout A réel il existe une valeur N de n pour laquelle $u_N \geq A$; comme (u_n) est croissante, pour toutes les valeurs de n supérieures à N , on a $u_n \geq A$. La définition précédente est respectée, (u_n) tend bien vers $+\infty$.

2. La suite (β_n) est croissante pour les mêmes raisons que (α_n) ; comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ et que $g(\beta_n) = n$, les termes β_n sont comme x et tendent donc vers l'infini.

De manière plus élégante on peut considérer que g est bijective et a une application réciproque g^{-1} qui est telle que $\lim_{y \rightarrow +\infty} g^{-1}(y) = +\infty$ d'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} g^{-1}(n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \beta_n = +\infty$.

5. Exercice 4 (5 points)

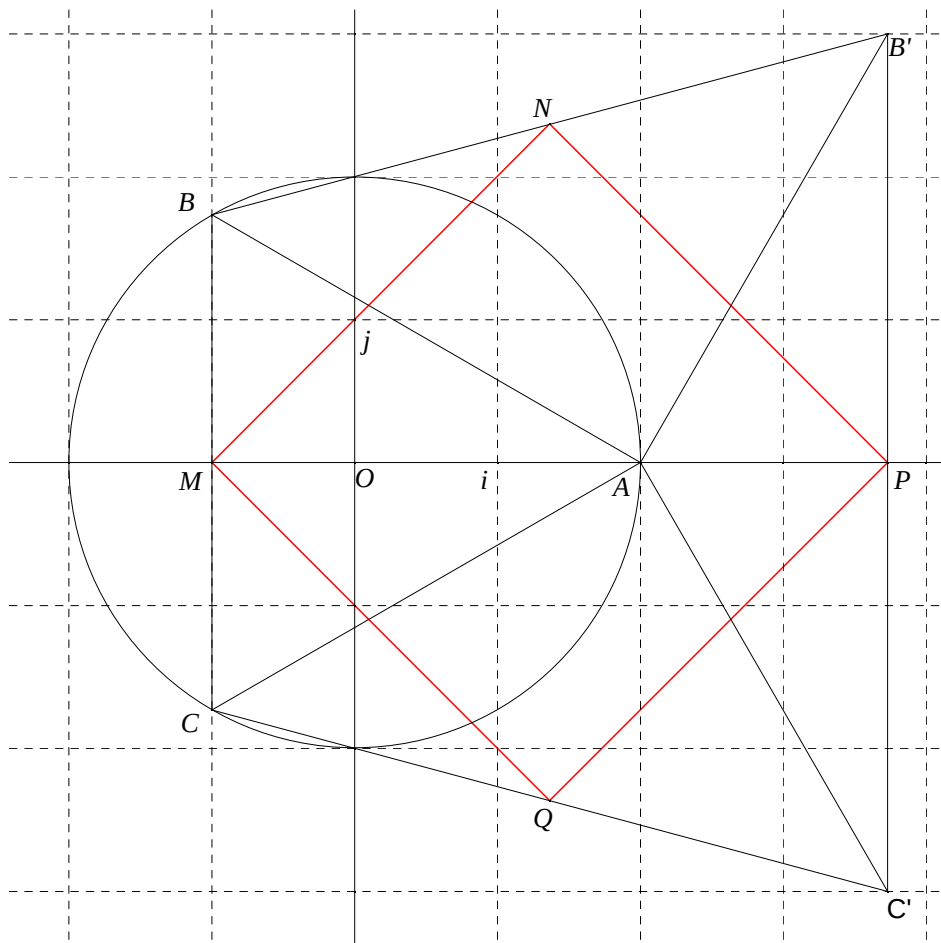
1. Avec $a = z$ et $b = 2$ on a : $z^3 - 2^3 = (z-2)(z^2 + 2z + 4)$; $\Delta = 4 - 16 = -12 = (2i\sqrt{3})^2$ d'où les solutions

$$z_0 = 2, \quad z_1 = \frac{-2 - 2i\sqrt{3}}{2} = -1 - i\sqrt{3}, \quad z_2 = \frac{-2 + 2i\sqrt{3}}{2} = -1 + i\sqrt{3}.$$

2. a. $a = 2$, $b = -1 + i\sqrt{3}$ et $c = -1 - i\sqrt{3}$.

b. $b' - a = e^{-i\frac{\pi}{2}}(b - a) \Leftrightarrow b' = 2 - i(-1 + i\sqrt{3} - 2) = 2 + \sqrt{3} + 3i$.

c. $c' - a = e^{i\frac{\pi}{2}}(c - a) \Leftrightarrow c' = 2 + i(-1 - i\sqrt{3} - 2) = 2 + \sqrt{3} - 3i$. Qui est bien le conjugué de b' .



$$3. a. \quad n = \frac{b+b'}{2} = \frac{1}{2}(-1 + i\sqrt{3} + 2 + \sqrt{3} + 3i) = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{3} + i(\sqrt{3} + 3)) \text{ et}$$

$\frac{1+\sqrt{3}}{2}(1+i\sqrt{3}) = \frac{1}{2}(1+\sqrt{3}+i\sqrt{3}+i3)$. C'est pareil. $n = \frac{1+\sqrt{3}}{2}(1+i\sqrt{3}) = \frac{1+\sqrt{3}}{2}c \Leftrightarrow \overline{ON} = \frac{1+\sqrt{3}}{2}\overline{OC}$, les vecteurs sont colinéaires, les points sont alignés.

b. M a pour affixe $\frac{b+c}{2} = -1$, q est le milieu de $[CC']$ et a pour affixe le conjugué de n (puisque c et c' sont les conjugués respectifs de b et b'), soit $q = \frac{1+\sqrt{3}}{2}(1-i\sqrt{3})$.

On a alors $n+1 = \frac{1+\sqrt{3}}{2}(1+i\sqrt{3})+1 = \frac{3+\sqrt{3}}{2}+i\frac{\sqrt{3}+3}{2}$ et $i(q+1) = i\frac{1+\sqrt{3}}{2}(1-i\sqrt{3})+i = \frac{\sqrt{3}+3}{2}+i\frac{3+\sqrt{3}}{2}$
d'où $n+1 = i(q+1)$. Le triangle MNQ est un triangle rectangle isocèle car le vecteur $\overrightarrow{MQ}$ a pour image le vecteur $\overrightarrow{MN}$ par la rotation r .

c. Comme Q est le symétrique de N par rapport à (Ox) et que M et P sont sur (Ox) , les triangles MNP et MQP sont isométriques donc $MNPQ$ est un carré.