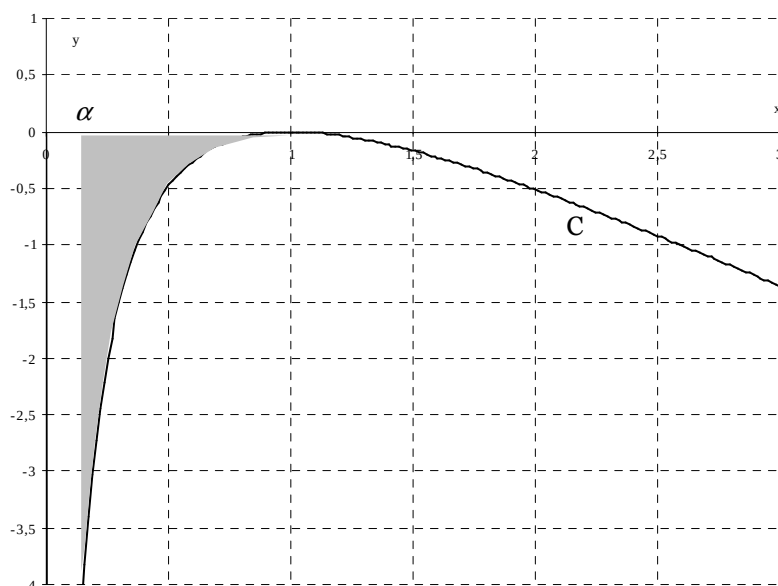


Baccalauréat session de remplacement**Polynésie****1. Exercice 1 (9 points)**

La courbe C donnée ci-dessous est la représentation graphique de la fonction f définie sur $]0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}} + 1 - x.$$



1. a. Montrer que f est dérivable et que, pour tout x strictement positif, $f(x)$ est du signe de $N(x) = -\left[2\left(x\sqrt{x} - 1\right) + \ln x\right]$.

b. Calculer $N(1)$ et déterminer le signe de $N(x)$ en distinguant les cas $0 < x < 1$ et $x > 1$.

c. En déduire le sens de variation de f sur $]0 ; +\infty[$ et les coordonnées du point de C d'ordonnée maximale.

2. On note $A(\alpha)$ l'aire, exprimée en unités d'aire, de la partie du plan grisée sur la figure, où α désigne un réel de $]0 ; 1[$.

a. Exprimer $A(\alpha)$ en fonction de α (on pourra utiliser une intégration par parties).

b. Calculer la limite de $A(\alpha)$ lorsque α tend vers 0. Donner une interprétation de cette limite.

3. On définit une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par son premier terme u_0 élément de $[1 ; 2]$ et :

$$\text{pour tout entier naturel } n, u_{n+1} = \frac{\ln u_n}{\sqrt{u_n}} + 1.$$

a. Démontrer, pour tout réel x élément de $[1 ; 2]$, la double inégalité : $0 \leq \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \leq 1$.

b. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , u_n appartient à $[1 ; 2]$.

4. En remarquant que, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = f(u_n) + u_n$, déterminer le sens de variation de la suite (u_n) .
5. a. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente. On note l sa limite.
b. Déterminer la valeur exacte de l .

2. Exercice 2 (5 points, non spécialistes)

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$. On prendra 2 cm pour unité graphique.

Pour tout point M du plan d'affixe z on considère les points M' et M'' d'affixes respectives $z' = z - 2$ et $z'' = z^2$.

- a. Déterminer les points M pour lesquels $M'' = M$.
b. Déterminer les points M pour lesquels $M'' = M'$.
- Montrer qu'il existe exactement deux points M_1 et M_2 dont les images M'_1, M''_1, M'_2, M''_2 appartiennent à l'axe des ordonnées. Montrer que leurs affixes sont conjuguées.
- On pose $z = x + iy$ où x et y sont des nombres réels.
 - Exprimer sous forme algébrique le nombre complexe $\frac{z'' - z}{z' - z}$.
 - En déduire l'ensemble E des points M du plan pour lesquels les points M, M' et M'' sont alignés. Représenter E graphiquement et en couleur.
- On pose $z = e^{i\theta}$ où $\theta \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.
 - Déterminer l'ensemble Γ des points M d'affixe z ainsi définis et chacun des ensembles Γ' et Γ'' des points M' et M'' associés à M .
 - Représenter Γ, Γ' et Γ'' sur la figure précédente.
 - Dans cette question $\theta = \frac{\pi}{6}$. Placer le point M_3 obtenu pour cette valeur de θ , et les points M'_3, M''_3 associés. Montrer que le triangle $M_3 M'_3 M''_3$ est rectangle. Est-il isocèle ?

3. Exercice 2 (5 points, spécialité)

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$. On prendra sur la figure 1 cm pour unité graphique.

On désigne par A, B et C les points d'affixes respectives $-1 + i, 3 + 2i$ et $i\sqrt{2}$.

1. On considère la transformation f du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe z associe le point $M' = f(M)$ d'affixe z' définie par :

$$z' = \frac{1+i}{\sqrt{2}} \bar{z} - 1 + i(1 + \sqrt{2}).$$

- Calculer les affixes des points $A' = f(A)$ et $C' = f(C)$.
 - En déduire la nature de f et caractériser cette transformation.
 - Placer les points A, B et C puis construire le point $B' = f(B)$.
- a. Donner l'écriture complexe de l'homothétie h de centre A et de rapport $\sqrt{2}$.
b. Montrer que la composée $g = f \circ h$ a pour écriture complexe $z'' = (1+i)\bar{z} - 1 + 3i$.
 - a. Soit M_0 le point d'affixe $2 - 4i$. Déterminer l'affixe du point $M''_0 = g(M_0)$ puis vérifier que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AM''_0}$ sont orthogonaux.

b. On considère un point M d'affixe z . On suppose que la partie réelle x et la partie imaginaire y de z sont des entiers. Démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont orthogonaux si, et seulement si, $5x + 3y = -2$.

c. Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $5x + 3y = -2$.

d. En déduire les points M , dont les coordonnées sont des entiers appartenant à l'intervalle $[-6; 6]$, tels que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont orthogonaux. Placer les points obtenus sur la figure.

Correction

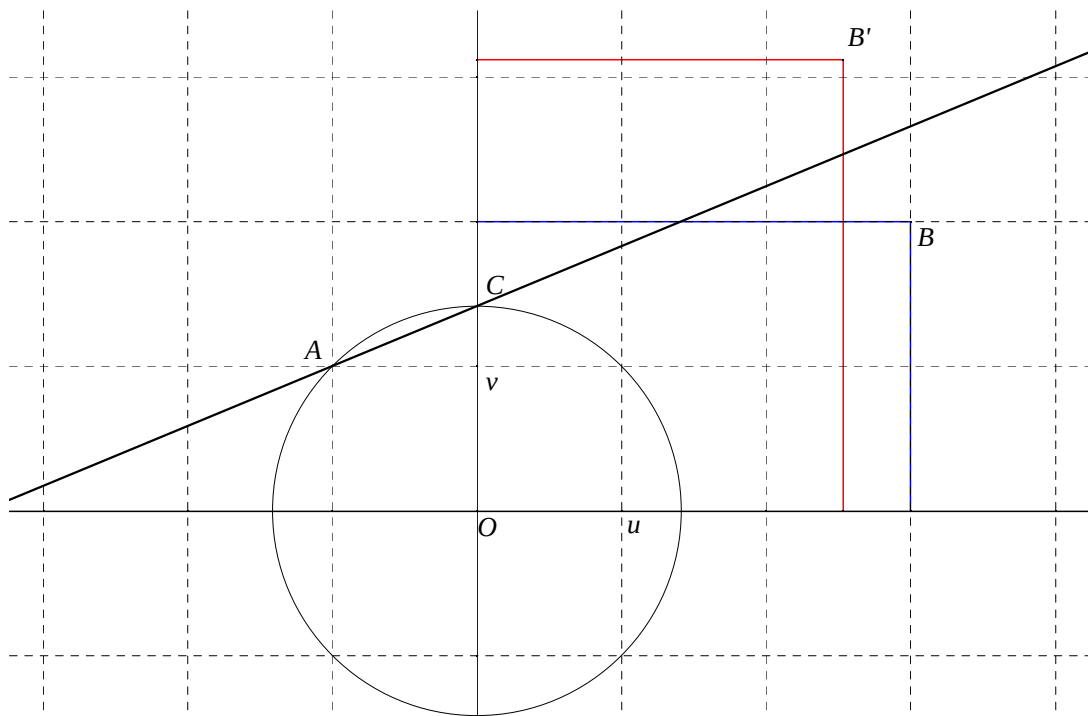
On désigne par A , B et C les points d'affixes respectives $-1+i$, $3+2i$ et $i\sqrt{2}$.

1. a. $z' = \frac{1+i}{\sqrt{2}} \bar{z} - 1 + i(1+\sqrt{2})$: $a' = \frac{1+i}{\sqrt{2}} (-1-i) - 1 + i(1+\sqrt{2}) = -i\sqrt{2} - 1 + i + i\sqrt{2} = -1 + i$,

$c' = \frac{1+i}{\sqrt{2}} (-i\sqrt{2}) - 1 + i(1+\sqrt{2}) = -i + 1 - 1 + i + i\sqrt{2} = i\sqrt{2}$.

b. On a $\left| \frac{1+i}{\sqrt{2}} \right| = \left| e^{i\frac{\pi}{4}} \right| = 1$ donc f est une isométrie. Par ailleurs les deux points A et C sont invariants donc f est une réflexion d'axe (AC) .

c.



2. a. $h: z \rightarrow z' \mid z' - a = \sqrt{2}(z - a) \Leftrightarrow z' = \sqrt{2}z + a(1 - \sqrt{2}) = \sqrt{2}z + (-1+i)(1 - \sqrt{2})$

b. $g = f \circ h = z \xrightarrow{h} z' \xrightarrow{f} z'' = \frac{1+i}{\sqrt{2}} \bar{z}' - 1 + i(1 - \sqrt{2}) = \frac{1+i}{\sqrt{2}} \overline{\sqrt{2}z + (-1+i)(1 - \sqrt{2})} - 1 + i(1 - \sqrt{2})$, soit

$z'' = \frac{1+i}{\sqrt{2}} \left[\sqrt{2} \bar{z} + (-1-i)(1 - \sqrt{2}) \right] - 1 + i(1 - \sqrt{2}) = (1+i)\bar{z} + \frac{1+i}{\sqrt{2}} (-1-i)(1 - \sqrt{2}) - 1 + i(1 - \sqrt{2})$;

il reste à simplifier :

$$\frac{1+i}{\sqrt{2}} (-1-i)(1 - \sqrt{2}) - 1 + i(1 - \sqrt{2}) = -i\sqrt{2}(1 - \sqrt{2}) - 1 + i(1 - \sqrt{2}) = -1 + i(-\sqrt{2} + 2 + 1 + \sqrt{2}),$$

soit finalement $z'' = (1+i)\bar{z} - 1 + 3i$.

3. a. $z_0 = 2 - 4i \rightarrow z_0'' = (1+i)(2+4i) - 1 + 3i = -3 + 9i$; $\overline{AB}$ a pour affixe $b - a = 3 + 2i + 1 - i = 4 + i$ et $\overline{AM_0''}$ a pour affixe $z_0'' - a = -3 + 9i + 1 - i = -2 + 8i$; avec le produit scalaire on a : $4 \cdot (-2) + 1 \cdot 8 = -8 + 8 = 0$, les vecteurs sont orthogonaux.

b. $z = x + iy \rightarrow z'' = (1+i)(x-iy) - 1 + 3i = x + y - 1 + i(x - y + 3) \Rightarrow z'' - a = x + y + i(x - y + 2)$;

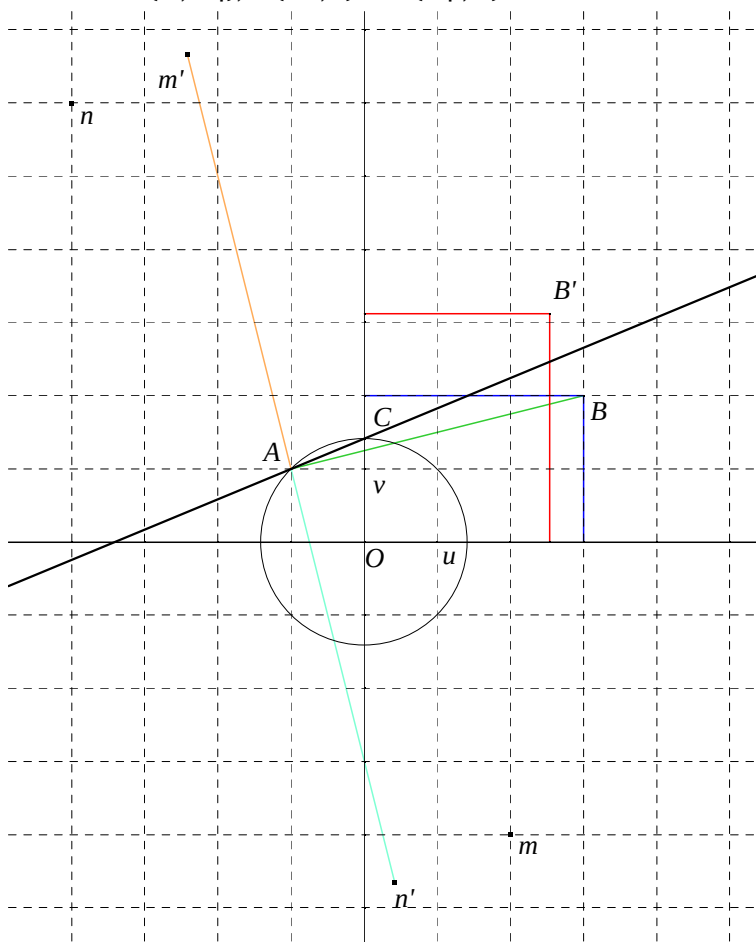
le produit scalaire donne $4(x+y) + 1(x-y+2) = 5x + 3y + 2$ et est nul lorsque $5x + 3y = -2$.

c. On a une solution évidente : $x = 2, y = -4$; soustrayons :

$$\begin{cases} 5x + 3y = -2 \\ 5 \cdot 2 + 3(-4) = -2 \end{cases} \Rightarrow 5(x-2) + 3(y+4) = 0 \Leftrightarrow 5(2-x) = 3(y+4) \Leftrightarrow \begin{cases} 2-x = 3k \\ y+4 = 5k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2-3k \\ y = -4+5k \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{d. } \begin{cases} -6 \leq x \leq 6 \\ -6 \leq y \leq 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -6 \leq 2-3k \leq 6 \\ -6 \leq -4+5k \leq 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -8 \leq -3k \leq 4 \\ -2 \leq 5k \leq 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{4}{3} \leq k \leq \frac{8}{3} \\ -\frac{2}{5} \leq k \leq \frac{10}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = -1, 0, 1, 2 \\ k = 0, 1, 2 \end{cases} \Leftrightarrow k = 0, 1, 2.$$

Il y a trois points seulement : $m(2 ; -4), A(-1 ; 1)$ et $n(-4 ; 6)$.



4. Exercice 3 (6 points)

On donne dans le plan trois points A, B et C distincts non alignés.

Une urne U contient six cartons indiscernables au toucher portant les nombres $-2, -1, 0, 1, 2$ et 3 . Une urne V contient cinq cartons indiscernables au toucher ; quatre cartons portent le nombre 1 et un carton le nombre -1 .

On tire au hasard un carton dans chacune des urnes. Les tirages sont équiprobables. On note a le nombre lu sur le carton de U et b celui lu sur le carton de V .

1. Justifier que les points pondérés $(A ; a)$, $(B ; b)$ et $(C ; 4)$ admettent un barycentre. On note G ce barycentre.
2. a. Déterminer la probabilité de chacun des événements suivants :
 E_1 : « G appartient à la droite (BC) » ;
 E_2 : « G appartient au segment $[BC]$ ».
b. Montrer que la probabilité de l'événement E_3 : « G est situé à l'intérieur du triangle ABC et n'appartient à aucun des côtés » est égale à $\frac{2}{5}$ (on pourra faire appel à des considérations de signe).
3. Soit n un entier naturel non nul. On répète n fois dans les mêmes conditions l'épreuve qui consiste à tirer un carton dans chacune des urnes U et V puis à considérer le barycentre de la question 1. On désigne par X la variable aléatoire prenant pour valeurs le nombre de réalisations de l'événement E_3 .
a. Déterminer l'entier n pour que l'espérance de la variable aléatoire X soit égale à 4.
b. Déterminer le plus petit entier n pour que la probabilité d'avoir au moins un des barycentres situé à l'intérieur du triangle ABC soit supérieure ou égale à 0,999.