

France métropolitaine

1. Exercice 1 (4 points)

On considère la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + 2n + 3 \end{cases}$ pour tout entier naturel n .

1. Etudier la monotonie de la suite (u_n) .
2. a. Démontrer que, pour tout entier naturel n , $u_n > n^2$.
- b. Quelle est la limite de la suite (u_n) ?
3. Conjecturer une expression de u_n en fonction de n , puis démontrer la propriété ainsi conjecturée.

2. Exercice 2 (5 points, spécialistes)

1. Montrer que pour tout entier naturel non nul k et pour tout entier naturel x :

$$(x-1)(1+x+x^2+\dots+x^{k-1}) = x^k - 1.$$

Dans toute la suite de l'exercice, on considère un nombre entier a supérieur ou égal à 2.

2. a. Soit n un entier naturel non nul et d un diviseur positif de n : $n = dk$. Montrer que $a^d - 1$ est un diviseur de $a^n - 1$.
- b. Dédurre de la question précédente que $2^{2004} - 1$ est divisible par 7, par 63 puis par 9.
3. Soient m et n deux entiers naturels non nuls et d leur PGCD.
 - a. On définit m' et n' par $m = dm'$ et $n = dn'$. En appliquant le théorème de Bézout à m' et n' , montrer qu'il existe des entiers relatifs u et v tels que $mu - nv = d$.
 - b. On suppose u et v strictement positifs. Montrer que $(a^{mu} - 1) - (a^{nv} - 1)a^d = a^d - 1$. Montrer ensuite que $a^d - 1$ est le PGCD de $a^{mu} - 1$ et de $a^{nv} - 1$.
 - c. Calculer, en utilisant le résultat précédent, le PGCD de $2^{63} - 1$ et de $2^{60} - 1$.

3. Exercice 2 (5 points, non spécialistes)

Dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, i désigne le nombre de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

1. Montrer que $(1+i)^6 = -8i$.
2. On considère l'équation (E) : $z^2 = -8i$.
 - a. Dédurre de 1. une solution de l'équation (E).
 - b. L'équation (E) possède une autre solution ; écrire cette solution sous forme algébrique.
3. Dédurre également de 1. une solution de (E') : $z^3 = -8i$.
4. On considère le point A d'affixe $2i$ et la rotation r de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.
 - a. Déterminer l'affixe b du point B , image de A par r , ainsi que l'affixe c du point C , image de B par r .
 - b. Montrer que b et c sont solutions de (E').
5. a. Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{u}, \vec{v})$ (unité graphique 2 cm), représenter les points A , B et C .
- b. Quelle est la nature de la figure que forment les images de ces solutions ?
- c. Déterminer le centre de gravité de cette figure.

4. Exercice 3 (5 points)

Pour chaque question une seule réponse est exacte. Une réponse exacte rapporte 1 point, une réponse inexacte enlève 1/2 point ; l'absence de réponse est comptée 0 point. Si le total est négatif la note est ramenée à 0.

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on donne le point $S(1; -2; 0)$ et le plan P d'équation $x + y - 3z + 4 = 0$.

1. Une représentation paramétrique de la droite D passant par le point S et perpendiculaire au plan P est :

$$A : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - 2t \\ z = -3 \end{cases} \quad B : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = -1 + t \\ z = 1 - 3t \end{cases} \quad C : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -2 - 2t \\ z = 3t \end{cases} \quad D : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = -1 + t \\ z = -3 - 3t \end{cases} \quad (t \text{ réel}).$$

2. Les coordonnées du point d'intersection H de la droite D avec le plan P sont :

$$A : (-4; 0; 0) \quad B : \left(\frac{6}{5}; \frac{-9}{5}; \frac{-3}{5}\right) \quad C : \left(\frac{7}{9}; \frac{-2}{3}; \frac{1}{3}\right) \quad D : \left(\frac{8}{11}; \frac{-25}{11}; \frac{9}{11}\right)$$

3. La distance du point S au plan P est égale à :

$$A : \frac{\sqrt{11}}{3} \quad B : \frac{3}{\sqrt{11}} \quad C : \frac{9}{\sqrt{11}} \quad D : \frac{9}{11}$$

4. On considère la sphère de centre S et de rayon 3. L'intersection de la sphère S et du plan P est égale :

$$A : \text{au point } I(1; -5; 0). \quad B : \text{au cercle de centre } H \text{ et de rayon } r = 3\sqrt{\frac{10}{11}}.$$

$$C : \text{au cercle de centre } S \text{ et de rayon } 2. \quad D : \text{au cercle de centre } H \text{ et de rayon } r = \frac{3\sqrt{10}}{11}.$$

5. Exercice 4 (6 points)

On s'intéresse à la durée de vie, exprimée en semaines, d'un composant électronique. On modélise cette situation par une loi de probabilité p de durée de vie sans vieillissement définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$: la probabilité que le composant ne soit plus en état de marche au bout de t semaines est

$p([0; t]) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} dx$. Une étude statistique, montrant qu'environ 50 % d'un lot important de ces composants sont encore en état de marche au bout de 200 semaines, permet de poser $p([0; 200]) = 0,5$.

1. Montrer que $\lambda = \frac{\ln 2}{200}$.

2. Quelle est la probabilité qu'un de ces composants pris au hasard ait une durée de vie supérieure à 300 semaines ? On donnera la valeur exacte et une valeur approchée décimale au centième près.

3. On admet que la durée de vie moyenne d_m de ces composants est la limite quand A tend vers $+\infty$ de

$$\int_0^A \lambda x e^{-\lambda x} dx.$$

a. Montrer que $\int_0^A \lambda x e^{-\lambda x} dx = \frac{-\lambda A e^{-\lambda A} - e^{-\lambda A} + 1}{\lambda}$.

b. En déduire d_m ; on donnera la valeur exacte et une valeur approchée décimale à la semaine près.

ANNEXE
À rendre avec la copie
Figure de l'exercice 2 de spécialité

