



Exercice 1 (4 points)

Soit (U_n) la suite réelle définie sur $\mathbb{N}$ par
$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \frac{U_n}{1+2U_n} ; n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

- 1) a- Calculer U_1 et U_2 .
- b- Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n > 0$.

- 2) a- Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} - U_n = \frac{-2U_n^2}{1+2U_n}$.

- b- En déduire que la suite (U_n) est décroissante.
- c- Prouver alors, que la suite (U_n) est convergente.

- 3) a- Calculer le réel ℓ tel que, $\ell = \frac{\ell}{1+2\ell}$.

- b- En déduire la limite de la suite (U_n) .

Exercice 2 (4 points)

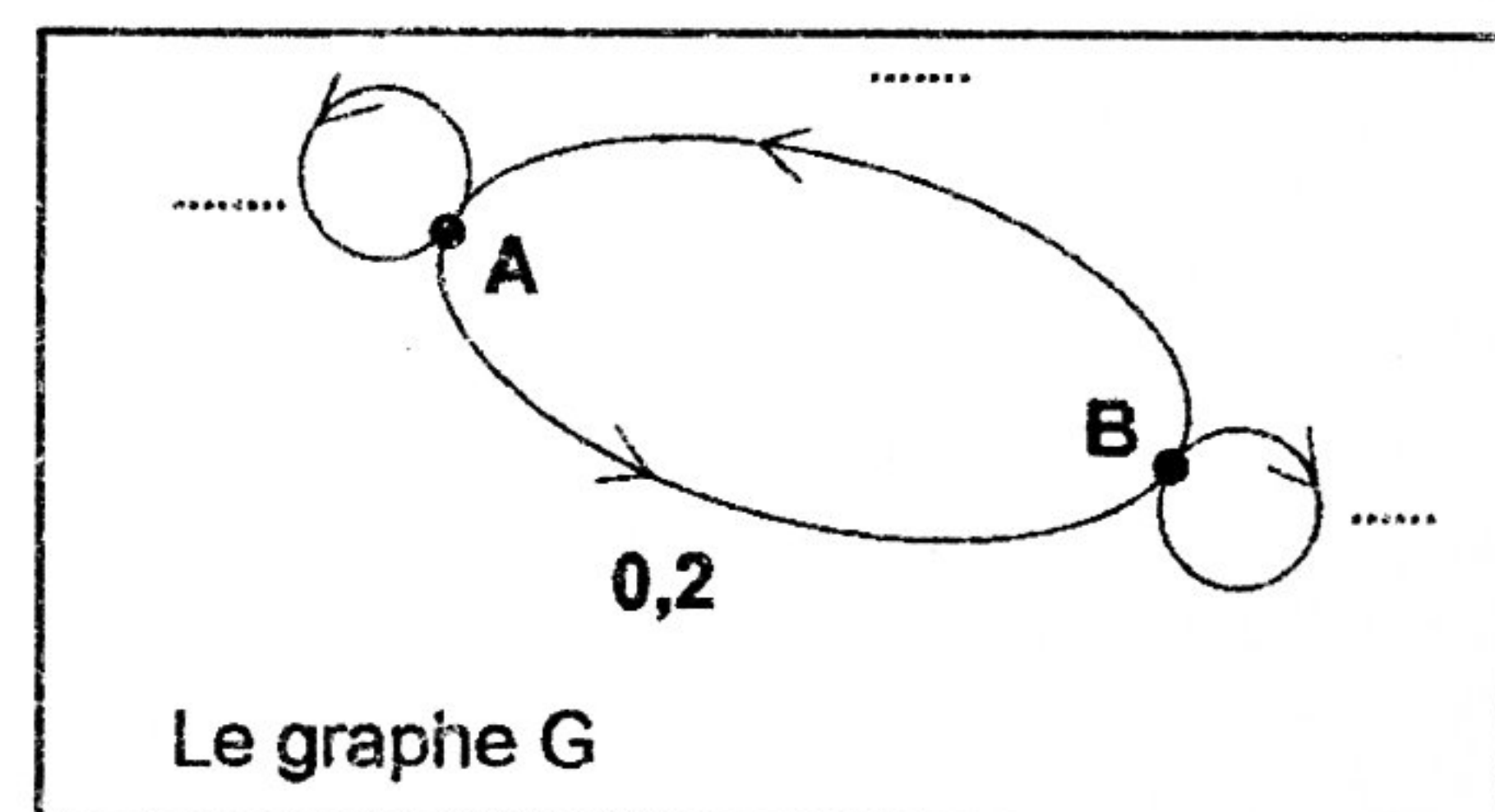
Une compagnie d'assurance propose deux formules A et B d'assurance autos.

Une personne désirant s'affiler à cette compagnie choisit **une seule** de ces deux formules.

- Au bout d'une année, chaque affilié peut garder la même formule ou changer de formule l'année suivante.
- La probabilité qu'un affilié à la formule A change de formule, vers la formule B, l'année suivante est égale 0,2.

Le graphe G ci-contre est le graphe probabiliste décrivant l'évolution du choix de l'affilé d'une année à l'autre.

Soit $M = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,1 & 0,9 \end{pmatrix}$ la matrice de transition associée au graphe G.



- 1) Recopier et compléter le graphe G.
- 2) Donner :
 - a) La probabilité qu'un affilié à la formule B garde la même formule B l'année suivante.
 - b) La probabilité qu'un affilié à la formule B change de formule, vers la formule A, l'année suivante.
- 3) Soit $P_0 = (0,3 \quad 0,7)$ la matrice ligne qui décrit l'état initial. Donner la matrice ligne P_1 décrivant l'état probabiliste après une année.
- 4) Montrer que la matrice $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ traduit l'état stable de la situation.

Exercice 3 (6 points)

On considère les matrices

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } N = \begin{pmatrix} -1 & 6 & -8 \\ 0 & 2 & -3 \\ 1 & -7 & 10 \end{pmatrix}$$

- 1) a- Calculer le déterminant de M , en déduire que M est inversible.
b- Calculer la matrice $M \times N$, en déduire la matrice inverse M^{-1} de M .

c- Résoudre, dans $\mathbb{R}^3$, le système (S) :

$$\begin{cases} x + 4y + 2z = 110 \\ 3x + 2y + 3z = 120 \\ 2x + y + 2z = 75 \end{cases}$$

- 2) Un atelier fabrique trois sortes de pièces mécaniques A, B et C.
- Les bénéfices unitaires sont : 60 Dinars pour A, 50 Dinars pour B et 40 Dinars pour C.
 - L'atelier utilise trois machines X, Y et Z pour fabriquer les pièces A, B et C.
 - Le temps unitaire (exprimé en heures) de passage de chaque pièce sur ces machines est donné par le tableau suivant :

Pièce \ Machine	A	B	C
X	1	4	2
Y	3	2	3
Z	2	1	2

- Les capacités hebdomadaires, exprimées en heures, des machines X, Y et Z sont respectivement : 110, 120 et 75 (ce qui correspond au cas où les machines X, Y et Z travaillent à plein temps).
 - On note respectivement a , b et c les nombres hebdomadaires (exprimés en dizaines) de pièces A, B et C fabriquées quand les trois machines X, Y et Z travaillent à plein temps.
- a- Montrer que le triplet (a, b, c) vérifie le système (S) donné en 1) c).
- b- Déterminer alors a , b et c .
- c- Déterminer le bénéfice hebdomadaire gagné par l'entreprise quand les trois machines X, Y et Z travaillent à plein temps.

Exercice 4 (6 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{-2}{1+e^x}$ et (C) sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) a- Calculer $f(0)$.

b- Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ puis interpréter graphiquement les résultats obtenus.

2) a- Montrer que pour tout réel x , $f'(x) = \frac{2e^x}{(1+e^x)^2}$.

b- Dresser le tableau de variation de f .

c- Donner une équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse 0.

d- Tracer, dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, la tangente (T) et la courbe (C).

3) a- Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle J que l'on précisera.

b- Tracer, dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, la courbe (Γ) représentative de la fonction réciproque f^{-1} de f .

4) a- Montrer que $I = \int_0^{\ln 2} \frac{e^x}{1+e^x} dx = \ln \frac{3}{2}$.

b- Vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{2e^x}{1+e^x} - 2$.

c- Calculer l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe (C) de f , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=0$ et $x=\ln 2$.