

Résumé : *Nombres complexes*
Niveau : *Bac sciences techniques*
Réalisé par : *mouhamed aziz*
mhamdi

Définition :

Il existe un ensemble noté $\mathbb{C}$, appelé **ensemble des nombres complexes** qui possède les propriétés suivantes :

- $\mathbb{C}$ contient l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$.
- L'addition et la multiplication des nombres réels se prolongent aux nombres complexes et les règles de calcul restent les mêmes.
- Il existe un nombre complexe noté i tel que $i^2 = -1$.
- Tout nombre complexe z s'écrit de manière unique : $z = a + ib$ avec a et b sont des réels.

L'écriture $z = a + ib$ avec a et b réels est appelée **forme algébrique** ou **forme cartésienne** du nombre complexe z . a est la **partie réelle** de z , notée $R(z)$. b est la **partie imaginaire** de z notée $I(z)$.

Remarque :

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe donné sous forme cartésienne.

- Si $b = 0$, z est réel.
- Si $a = 0$, z est dit **imaginaire pur**.

Conséquences :

Soit z et z' deux nombres complexes.

- z est réel ssi $I(z) = 0$.
- z est imaginaire pur ssi $R(z) = 0$.
- $z = 0$ ssi $I(z) = R(z) = 0$.
- $z = z' \Leftrightarrow R(z) = R(z')$ et $I(z) = I(z')$.

Définition :

Le plan est muni d'un ROND $(O, \vec{u}, v)$. Soit (a, b) un point du plan.

- On appelle **affixe** de M , le nombre complexe noté $af(M)$ ou z_M tel que :

$af(M) = a + ib$. Le nombre complexe $a + ib$ est dit aussi l'affixe du vecteur $\vec{OM}$, on le note $af(\vec{OM})$ ou $z_{\vec{OM}}$.

- (a, b) est le **point image** du nombre complexe $z = a + ib$.

Propriétés :

A et B sont deux points du plan d'affixes respectives z_A et z_B . $\vec{u}$ et v sont deux vecteurs.

$$1) aff(\vec{AB}) = z_B - z_A$$

$$2) aff(\alpha \vec{u} + \beta v) = \alpha aff(\vec{u}) + \beta aff(v) \text{ pour tous réels } \alpha \text{ et } \beta.$$

Définition : "Conjugué d'un nombre complexe"

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe donné sous forme cartésienne.

On appelle **conjugué** de z et on note $\bar{z}$, le nombre complexe défini par $\bar{z} = a - ib$.

Propriétés :

Soient $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ deux nombres complexes donnés sous forme cartésienne.

$$1) \overline{\bar{z}} = z$$

$$5) z + \bar{z} = 2a$$

$$2) \overline{z'z} = \bar{z}' \cdot \bar{z}$$

$$6) z - \bar{z} = 2ib$$

$$3) \overline{z^n} = (\bar{z})^n, n \in \mathbb{N}^*$$

$$7) z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2$$

$$4) \left(\frac{z}{z'}\right) = \frac{\bar{z}}{\bar{z}'}, z' \neq 0$$

Soit z un nombre complexe.

$$- z \text{ est réel} \Leftrightarrow z = \bar{z}$$

$$- z \text{ est imaginaire pur} \Leftrightarrow z = -\bar{z}$$

Théorème :

Définition : "Module d'un nombre complexe"

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe donné sous forme cartésienne.

On appelle **module** de z et on note $|z|$, le réel positif défini par $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z\bar{z}}$

Propriétés :

Soient z et z' deux nombres complexes.

$$1) |z \cdot z'| = |z| \cdot |z'|$$

$$4) |z^n| = |z|^n, n \in \mathbb{N}^*$$

$$2) |z| = |\bar{z}|$$

$$5) \left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}, z' \neq 0$$

$$3) |-z| = |z|$$

$$6) |z + z'| \leq |z| + |z'|$$

Propriété :

Soit A et B deux points d'affixes respectives z_A et z_B .

$$\text{Alors : } AB = |z_B - z_A|$$

