

Exercice N°1

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère:

- Les points $A(1,1,1)$ et $B(3,2,0)$
- Le plan P passant par le point B et de vecteur normal $\overrightarrow{AB}$.
- Le plan Q d'équation: $x - y + 2z + 4 = 0$.
- La sphère S de centre A et de rayon AB.

- 1 Montrer qu'une équation cartésienne du plan P est: $2x + y - z - 8 = 0$
- 2 Déterminer une équation de la sphère S.
- 3 a) Calculer la distance du point A au plan Q. En déduire que le plan Q est tangent à la sphère S.
b) Le plan P est-il tangent à la sphère S?
- 4 On admet que le projeté orthogonal de A sur le plan Q, noté C, a pour coordonnées $(0, 2, -1)$.
a) Prouver que les plans P et Q sont sécants.
b) Soit Δ la droite d'intersection des plans P et Q.

Montrer qu'une représentation paramétrique de la droite Δ est
$$\begin{cases} x = \alpha \\ y = 12 - 5\alpha \\ z = 4 - 3\alpha \end{cases}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

- c) Vérifier que le point A n'appartient pas à la droite Δ .
- d) On appelle R le plan défini par le point A et la droite Δ
L'affirmation suivante est-elle vraie ou fausse?
« Tout point du plan R est équidistant des points B et C »
Justifier votre réponse.

Exercice N°2

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(0) = 0$ et $f(x) = x(2 - \ln(x))$.

On désigne par C_f la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1/ Etudier la dérivabilité de f à droite en 0. interpréter graphiquement le résultat.

2/a) Vérifier que pour tout $x > 0$; $f'(x) = 1 - \ln(x)$

b) Dresser le tableau de variation de f.

3/ a) Résoudre l'équation $f(x) = 0$.

b) Tracer C_f .

Exercice N°3

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par: $f(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

On note (C_f) sa courbe représentative dans Un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité 1 cm)

- 1 a – Dresser le tableau de variation de f
b – Ecrire l'équation de la tangente T à (C_f) au point d'abscisse 0
c – Etudier la position relative de (C_f) et la tangente T
d – Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet dans $\mathbb{R}$ une solution unique α et $1 < \alpha < 2$
e – Construire (C_f) et T
- 2 a – Calculer l'aire de la partie du plan limitée par (C_f) , l'axe des abscisses et $x = -1$ et $x = 1$
b – Montrer que: $0 \leq f'(x) \leq \frac{\sqrt{2}}{4}$ pour tout $x \geq 1$
- 3 a – Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers un intervalle J que l'on précisera
b – Montrer que f^{-1} est dérivable en 1, puis déterminer $(f^{-1})'(1)$
c – Construire dans le même repère (C_f)
- 4 On considère la suite (U_n) définie par: $U_0 = 2$ et $U_{n+1} = f(U_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
a – Montrer que: $U_n \geq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
b – Montrer que: $|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{\pi}{4} |U_n - \alpha|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
c – En déduire que la suite (U_n) est convergente

<u>L. S. El Ksour</u>	<u>DEVOIR DE</u> <u>Maison N°2</u>	<u>Bouzouraa</u> <u>Chaouki</u>
<u>Année Scolaire</u> <u>2013-2014</u>	<u>Mathématiques</u>	<u>4 Tech</u>



Exercice N°4

l'espace ξ est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

Soit $S = \{M(x, y, z) \in \xi : x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 4z + 5 = 0\}$

- 1) Montrer que S est une sphère dont on déterminera le centre C et le rayon R .
- 2) Soit P le plan dont une équation cartésienne est : $x - 2y + 2z + 2 = 0$
 - a) Montrer que l'intersection de la sphère S et le plan P est un cercle ξ .
 - b) Déterminer les coordonnées du centre A et le rayon r du cercle ξ .
- 3) Soit $M(a, b, -1)$ un point de la sphère S où a et b sont deux réels et Q le plan dont une équation cartésienne est : $(a-1)x + (b+2)y + z - a + 2b + 3 = 0$.
 - a) Montrer que M appartient au plan Q .
 - b) Montrer que les plans Q et S sont tangents en M .

Exercice N°5

- 1) Soit g la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $g(x) = 1 - x^2 - \ln(x)$
 - a) Dresser le tableau de variation de g sur $]0, +\infty[$
 - b) Calculer $g(1)$ en déduire le signe de $g(x)$ sur $]0, +\infty[$
- 2) Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \frac{\ln(x)}{x} - x$ et ℓ sa courbe dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$
 - a) Montrer que $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$
 - b) Dresser le tableau de variation de f sur $]0, +\infty[$
- 3)
 - a) Montrer que $D : y = -x$ est une asymptote à ℓ
 - b) Étudier la position de ℓ et D
 - c) Tracer D et ℓ .

Exercice N°6

Soit la fonction f définie sur $[1, 2]$ par $f(x) = x + \frac{1}{4}(2 - x^2)$.

- 1)
 - a) Montrer que $f'(x) = 1 - \frac{1}{2}x$.
 - b) Dresser le tableau de variation de f sur $[1, 2]$
 - c) Montrer que pour tout $x \in [1, 2]$ on a : $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$.
 - d) Montrer que pour tout $x \in [1, 2]$ on a : $|f(x) - \sqrt{2}| \leq \frac{1}{2}|x - \sqrt{2}|$.
- 2) On considère la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}$
 - a) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n , on a $1 \leq U_n \leq 2$.
 - b) Montrer que, pour tout entier naturel n on a :
$$\left| U_{n+1} - \sqrt{2} \right| \leq \frac{1}{2} \left| U_n - \sqrt{2} \right|.$$
 - c) En déduire pour tout entier naturel n on a : $\left| U_n - \sqrt{2} \right| \leq \left(\frac{1}{2} \right)^n$.
 - d) Déterminer alors la limite de (U_n) .