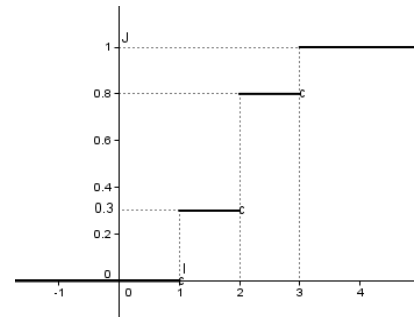


Le sujet comporte cinq exercices répartis en trois pages

EXERCICE 1: (2 points)

Pour chacune des propositions suivantes, une seule des trois réponses est exacte. Indiquez sur votre copie le numéro et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.



- 1) Dans le graphique ci-contre on a représenté dans un repère orthogonal (O,I,J) la fonction de répartition F d'une variable aléatoire réelle discrète X définie sur un univers Ω . Alors $p(X=2)$ est égale à :
- a) 0,8 b) 0,5 c) 0,3
-
- 2) Soit X une variable aléatoire à valeurs dans l'intervalle [1,5], qui suit une loi de probabilité uniforme. Alors $p(X>4)$ est égale à :
- a) $\frac{3}{4}$ b) $\frac{1}{4}$ c) 0
- 3) Le plan étant muni d'un repère orthonormé. Soit P la partie du plan limitée par la courbe de la fonction $f : x \mapsto \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations : $x = 1$ et $x = e$.
- Soit V le volume du solide de révolution engendré par la rotation de la partie P autour de l'axe des abscisses. Alors V (exprimé en unité de volume) est égal à :
- a) $\frac{\pi}{3}$ b) π c) $\frac{\pi.e}{3}$
- 4) Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = \ln \left(\frac{1}{n} + ne^{-n} \right)$. Alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ est égale à :
- a) 0 b) $+\infty$ c) $-\infty$

EXERCICE 2: (3 points)

Dans une région de 1000 Km², la superficie des terrains urbanisés entre 1970 et 1998 est donné par le tableau suivant :

Année	1970	1974	1978	1982	1986	1990	1994	1998
Rang de l'année : X	0	4	8	12	16	20	24	28
Superficie en Km ² : Y	80	94	110	129	152	178	205	236
Z = ln(Y)	4,38	4,54	4,70	4,86	5,02	5,18	5,32	5,46

Le nuage de points associé à la série statistique (X, Y) est représenté ci-contre :

■ Les estimations des superficies demandées dans l'exercice seront données en Km^2 et arrondies à l'unité.

1) a) Donner le coefficient de corrélation linéaire r de la série statistique (X, Y) , arrondi à 10^{-2} près.

b) Un ajustement affine de Y en X est-il possible ? Justifier.

c) Déterminer un ajustement affine de Y en X par la méthode de Mayer.

d) En déduire une estimation E_1 de la superficie des terrains urbanisés en 2010.

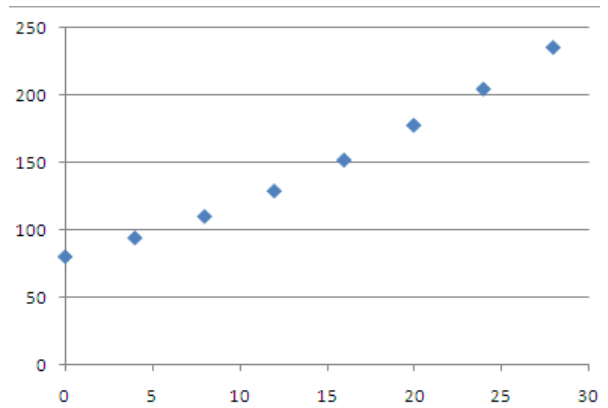
2) Le nuage de points associé à la série (X, Y) permet aussi d'envisager un **ajustement de type exponentiel**.

On pose $Z = \ln(Y)$. Les valeurs de Z sont données dans le tableau considéré arrondies à 10^{-2} près.

a) Donner le coefficient de corrélation linéaire r' de la série statistique (X, Z) arrondi à 10^{-4} près.

b) Déterminer un ajustement affine de Z en X par la méthode des moindres carrés.

c) En déduire une estimation E_2 de la superficie des terrains urbanisés en 2010.



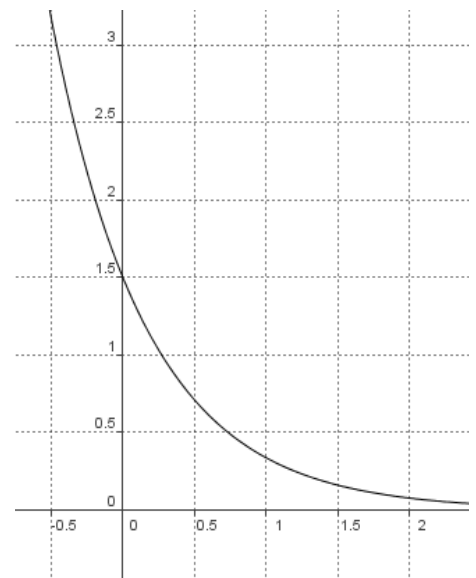
EXERCICE 3 : (5 points)

A/ Soit X une variable aléatoire continue qui suit une loi exponentielle de paramètre λ . ($\lambda > 0$)

La courbe ci-contre représente la fonction densité f associée à X ($f: t \mapsto \lambda e^{-\lambda t}$)

1) Interpréter graphiquement la probabilité $p(X \leq 1)$.

2) Indiquer sur le graphique où se lit directement le paramètre λ .



B/ Une machine-outil fabrique des cylindres. On mesure l'écart X , en dixième de millimètre, entre le diamètre des cylindres et la valeur de réglage de la machine. On suppose que cet écart suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 1,5$.

- Si l'écart $X \leq 1$, alors le cylindre est accepté.
- Si l'écart $1 \leq X \leq 2$, on procède à une rectification qui permet d'accepter le cylindre dans 80% des cas.
- Si l'écart $X \geq 2$, alors le cylindre est refusé.

■ On prélève au hasard un cylindre dans la production.

1) Montrer que la probabilité qu'il soit accepté est sensiblement égale à 0,915.

2) Sachant qu'il est accepté. Quelle est la probabilité qu'il ait subi une rectification ?

3) On considère un lot de dix cylindres, pour mesurer à chacun l'écart X . On suppose que ces mesures s'effectuent de façon indépendante.

Quelle est la probabilité qu'au moins un cylindre soit accepté ?

C/ Le temps d'attente (exprimé en années) de la première panne de cette machine-outil suit la loi exponentielle de paramètre 0,1.

1) Calculer la probabilité que cette machine-outil fonctionne six mois.

2) Sachant que cette machine outil n'a pas eu de panne durant six mois. Calculer la probabilité quelle fonctionne encore pendant au moins deux ans.



EXERCICE 4 : (4 points)

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :
$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{(u_n)^2}{2u_n - 1} \end{cases}$$

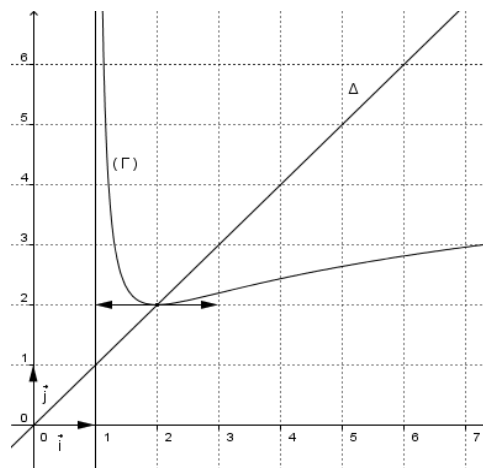
- 1) a) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $u_n > 1$
b) Montrer que la suite (u_n) est décroissante.
c) En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite ℓ .
- 2) on désigne par (v_n) et (w_n) les suites définies sur $\mathbb{N}$ par :
$$v_n = \frac{-1+u_n}{u_n} \text{ et } w_n = \ln(v_n)$$
 - a) Calculer w_0
 - b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $v_{n+1} = (v_n)^2$
 - c) En déduire que la suite (w_n) est géométrique dont on précisera la raison.
 - d) Exprimer w_n puis u_n à l'aide de n .
 - e) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

EXERCICE 5 : (6 points)

A/ Dans le graphique ci-contre, la courbe (Γ) est celle de la fonction g définie sur $]1, +\infty[$ par $g(x) = \frac{ax}{x-1} + b \ln(x-1)$ et la droite Δ est d'équation $y=x$.

L'unique tangente horizontale à la courbe (Γ) est au point $A(2,2)$

- 1) Dresser le tableau de variation de g .
- 2) En se servant des valeurs de $g(2)$ et $g'(2)$, montrer que $a=b=1$
- 3) a) Montrer que $\int_2^{e+1} \frac{x}{x-1} dx = e$
b) Calculer (en unité d'aire) l'aire de la partie du plan limitée par (Γ) , Δ et les droites d'équation $x=2$ et $x=e+1$



B/ Soit la fonction f définie sur $]1, +\infty[$ par : $f(x) = x \ln(x-1)$. On désigne par (C) sa courbe dans un repère orthonormé $(O', \vec{u}, \vec{v})$.

- 1) Montrer que pour tout réel x de $]1, +\infty[$ on a : $f'(x) = g(x)$.
- 2) Dresser le tableau de variation de f .
- 3) Etudier la branche infinie de (C) au voisinage de $+\infty$.
- 4) Montrer que le point $I(2,0)$ est un point d'inflexion de (C) .
- 5) Tracer la courbe (C) .

C/ Soit la suite (I_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $I_n = \int_2^e x^n \ln(x-1) dx$

- 1) a) Interpréter géométriquement le terme I_1 .
b) Vérifier que $\frac{x^2}{x-1} = x+1 + \frac{1}{x-1}$ pour tout réel $x \neq 1$
c) Calculer le terme I_1 .
- 2) a) Montrer que pour tout réel x de $[2, e]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $0 \leq x^n \ln(x-1) \leq x^n$
b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $0 \leq I_n \leq \frac{e^{n+1}}{n+1}$
c) Déterminer alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\int_2^e \left(\frac{x}{e} \right)^n \ln(x-1) dx \right)$

