

Direction régionale de l'éducation de Monastir
Lycée Ali Bourguiba Bembla

Devoir de synthèse n°3

➤ *Mosrati chawki*

Proposé par :

➤ *Aguech mabrouk*

16 Mai 2011

Matière : Mathématiques

Niveau : 4^{ème} Année

Section : Sciences techniques

Durée de l'épreuve : - 3 heures

- Coefficient 3

Ce sujet comporte 4 pages numérotées de 1 à 4

La page n°4 est à rendre avec les copies

L'usage d'une calculatrice est autorisé

Les élèves doivent traiter les 4 exercices .

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies

Exercice : 1(3 pts)

I/ Pour chacune des questions suivantes une seule des trois réponses proposées est exacte.

L'élève indiquera sur sa copie la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

1) $\int_{-1}^1 t e^{\cos t} dt$ est :

- a) Strictement positive b) Strictement négative c) Nulle.

2) La fonction : $x \mapsto \int_{-1}^x \frac{dt}{\sqrt{t^2 + 1}}$ est définie sur :

- a) $[1, +\infty[$ b) $]-1, +\infty[$ c) $\mathbb{R}$

3) La dérivée de la fonction $x \mapsto 3^x$ est la fonction

- a) $x \mapsto x 3^{x-1}$ b) $x \mapsto 3^x \ln 3$ c) $x \mapsto e^{x \ln 3}$

4) La valeur moyenne sur $[0, 1]$ de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x e^{1-x^2}$ est:

- a) 1 b) $\frac{e-1}{2}$ c) $e-1$

5) La courbe ci-contre est celle d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ et admet voisinage de $+\infty$ une branche parabolique de direction (y, y') .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} =$$

- a) 0 b) $+\infty$ c) $-\infty$

6) On considère la sphère S de centre $\Omega(1, -2, 1)$ et de rayon $\frac{2}{3}\sqrt{5}$ et la

droite $D : \begin{cases} x = \alpha + 1 \\ y = 2\alpha \\ z = -2\alpha + 1 \end{cases} ; \alpha \in \mathbb{R}$ alors l'intersection de D et S est :

- a) un point b) deux points c) $\emptyset$

Exercice : 2(5 pts)

On considère dans l'espace muni du repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

considère les points $A(2, 0, 3)$; $B(3, 2, 0)$, $C(2, 3, 0)$ et $D(2, 2, 3)$

1) a) Calculer le produit vectoriel: $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$; en déduire que les points A , B et C ne sont pas alignés.

B) Montrer qu'une équation du plan (ABC) est : $x + y + z - 5 = 0$.

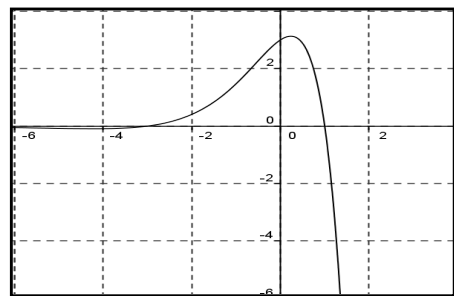
C) Vérifier que $ABCD$ est un tétraèdre puis calculer son volume V .

2) Soit S l'ensemble des points $M(x, y, z)$ tels que : $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z - 3 = 0$.

Montrer que S est une sphère dont on précisera le centre I et le rayon R .

3) Montrer que le tétraèdre $ABCD$ est inscrit dans la sphère S .

4) Soit C le cercle circonscrit au triangle ABC ; Déterminer le centre fi et le rayon r du cercle C .



au

Exercice :3 (4 pts)

Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on considère l'intégrale : $I_n = \int_1^e (\ln x)^n dx$.

1/ a- Démontrer que pour tout x de $]1; e[$ et pour tout n de $\mathbb{N}$, on a $(\ln x)^n - (\ln x)^{n+1} > 0$.

b- En déduire que la suite (I_n) est décroissante.

2/ a- Calculer I_1 .

b- Démontrer à l'aide d'une intégration par partie que pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $I_{n+1} = e - (n+1)I_n$.

c- En déduire I_2 .

3/ a- Démontrer que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $I_n \geq 0$.

b- Démontrer que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $(n+1)I_n \leq e$.

c- En déduire la limite de I_n .

Exercice :4 (8 pts)

Dans tout le problème le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$; on prendra 2cm comme unité sur les deux axes.

I/ On considère la fonction f , définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right)(\ln x - 2)$

On désigne par C sa courbe représentative.

1. Déterminer les limites de f en $+\infty$ et 0.

2. Soit g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = \ln x + x - 3$.

a- Étudier les variations de g .

b- Montrer que l'équation $g(x) = 0$ possède une solution unique $\alpha \in]0; +\infty[$ et que $2.20 < \alpha < 2.21$.

c- Étudier le signe de $g(x)$ sur $]0; +\infty[$

3. a- Montrer que f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et que $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$.

b- Dresser le tableau de variation de f .

c- Montrer que $f(\alpha) = -\frac{(\alpha-1)^2}{\alpha}$.

d- En déduire que $-0.65 < f(\alpha) < -0.66$.

4. a- Étudier le signe de $f(x)$.

b- Tracer C .

5. Soit h la restriction de f sur $]0; \alpha]$.

a- Montrer que h est une bijection de $]0; \alpha]$ dans un intervalle que l'on déterminera.

b- Tracer la courbe de h dans le même repère.

6. a- Montrer que $f(x) = \ln x - \frac{\ln x}{x} + \frac{2}{x} - 2$.

b- Montrer que $\int_1^{e^2} \frac{\ln x}{x} dx = 2$.

c- Calculer en cm^2 l'aire du domaine limité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e^2$.

Prof: Mosrati+Aguech	Sujet proposé (2011)	DEVOIR DE SYNTHESE N:3
SECTION : SCIENCES TECHNIQUES		
EPREUVE : MATHEMATIQUES	DUREE : 3 heures	COEFFICIENT : 3

Feuille à rendre

Nom : Prénom : Classe : 4 Technique :

Question :1	Question :2	Question :3	Question :4	Question :5	Question :6

