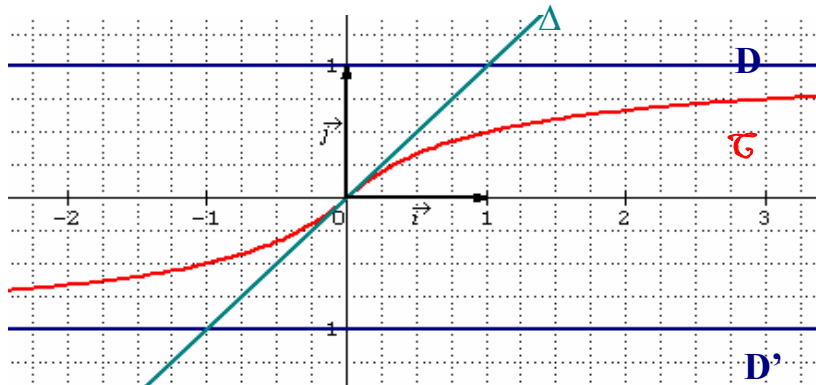


ENONCE**Exercice 1**

La courbe $\mathcal{C}$ ci-dessous représente une fonction g dérivable sur $\mathbb{R}$, D et D' sont les asymptotes de $\mathcal{C}$ et Δ est la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0.



- 1) Calculer $g'(0)$.
- 2) Dresser le tableau de variation de g .
- 3) La fonction g précédente est la fonction réciproque d'une fonction f .
 - a) Déterminer le domaine de définition de f .
 - b) Montrer que f est dérivable sur D_f et calculer $f'(0)$.
 - c) Dresser le tableau de variation de f .
 - d) Tracer, dans le même repère, la courbe Γ de f .

Exercice 2

Soit U et V les suites définies sur $\mathbb{N}$ par

$$\begin{cases} U_0 = 1 \text{ et } U_1 = \frac{5}{4} \\ U_{n+1} = \frac{5}{4}U_n - \frac{1}{4}U_{n-1} \text{ pour tout } n \geq 1 \end{cases} \quad \text{et } V_n = U_{n+1} - U_n$$

- 1) Montrer que V est une suite géométrique dont on donnera la raison et le premier terme.
- 2) En déduire le sens de variation de U .
- 3) En déduire U_n en fonction de n .
- 4) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$.

5) Soit S la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $S_n = \sum_{p=0}^n U_p$

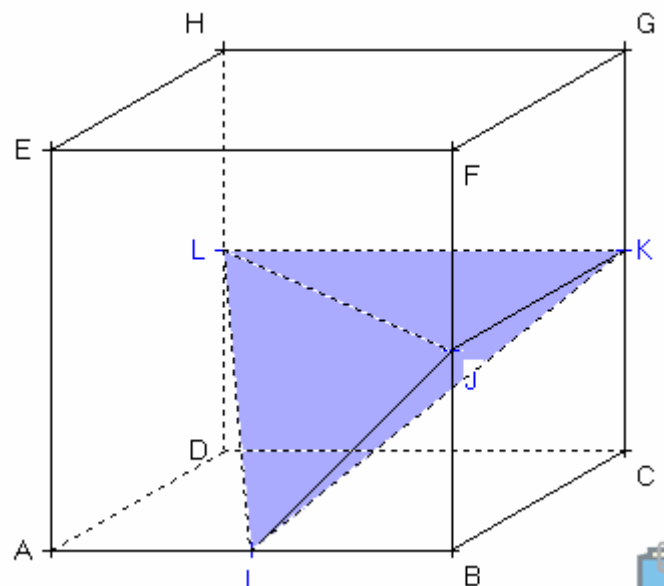
- a) Expliciter S_n .
- b) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$.

Exercice 3

ABCDEFGH est un cube, I, J, K et L sont les milieux respectifs des segments $[AB]$, $[DH]$, $[BF]$ et $[CG]$ comme indique la figure ci-contre :

On munit l'espace du repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

- 1) Lire les coordonnées des points I, J, L et K.
- 2) Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{JI}, \overrightarrow{JL}, \overrightarrow{JK}$ et $\overrightarrow{JI} \wedge \overrightarrow{JL}$.
- 3) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{JK} \cdot \overrightarrow{JL}$.
- 4) Calculer le volume du tétraèdre IJKL.
- 5) Calculer l'aire du triangle IJL.
- 6) En déduire la distance de K au plan (IJL).



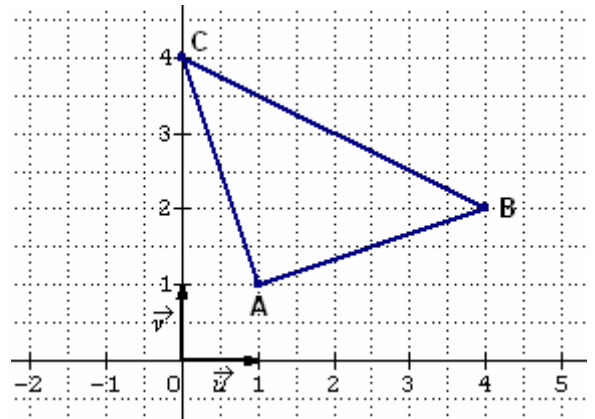
Exercice 4

Dans la plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$ on donne le triangle ABC comme indique la figure ci-contre :

- 1) Déterminer graphiquement les affixes des points A, B et C.
- 2) Déterminer la forme algébrique du nombre complexe

$$\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} \text{ et calculer son module.}$$

- 3) En déduire la nature du triangle ABC.
- 4) Soit I le point d'affixe $2 + 3i$.
 - a) Montrer que I est le milieu du segment [BC].
 - b) Calculer IA
- 5) Déterminer et construire l'ensemble $\mathcal{C}$ des points M(z) tels que $|z - 2 - 3i| = \sqrt{5}$.



Exercice 5

Soi F la fonction définie par $F(x) = \int_0^{\ln(|x|)} \frac{dt}{2 + \sin(t)}$.

- 1) Déterminer le domaine de définition D de F.
- 2) Montrer que F est une fonction paire.
- 3) a) Montrer que si $0 < x < 1$ alors $F(x) \leq \frac{\ln(x)}{3}$
- b) En déduire $\lim_{0^+} F$
- 4) a) Montrer que si $x > 1$ alors $\frac{\ln(x)}{3} \leq F(x) \leq \ln(x)$
- b) En déduire $\lim_{+\infty} F$
- c) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x)}{x}$ et interpréter géométriquement le résultat.
- 5) Montrer que F est dérivable sur D et déterminer sa fonction dérivée F'.
- 6) Dresser alors le tableau de variation de F.
- 7) Donner l'allure de la courbe $\mathcal{C}$ de F dans un repère orthogonal.

CORRIGE

Exercice 1

1) On sait que, dans un repère orthogonal, le nombre dérivé de g en 0 est la pente de la tangente à sa courbe au point d'abscisse 0 donc $g'(0) = 1$.

2) Par simple lecture graphique on a :

x	$-\infty$	$+\infty$
$g'(x)$	+	
$g(x)$	-1	1

3) a) D'après le tableau de variation de g on a $D_f =]-1, 1[$.

b) Par lecture graphique on constate que $\mathcal{C}$ n'a pas de tangente horizontale donc la courbe de f n'a pas de tangente verticale donc f est dérivable sur $]-1, 1[$.

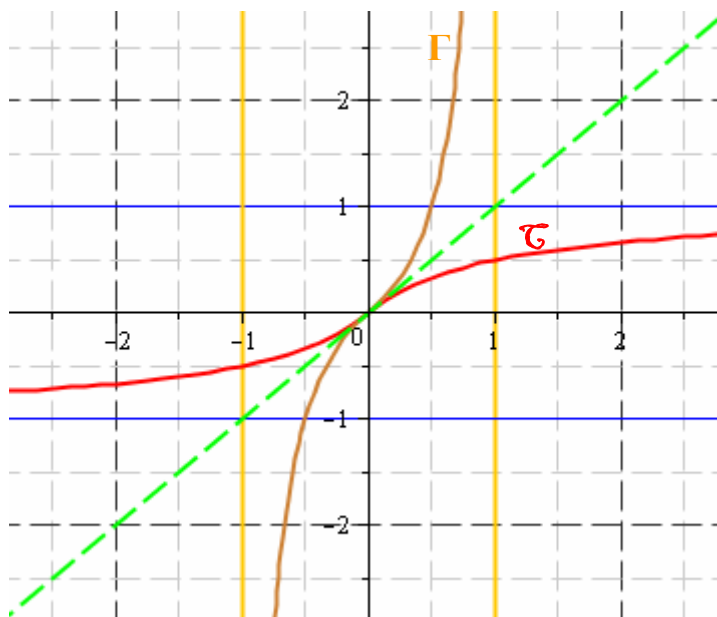
Puisque Δ est une tangente commune de la courbe de f et celle de g alors $f'(0) = 1$.

c) On sait que f et g ont le même sens de variation d'où :

:

x	-1	1
$f'(x)$	+	
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

d)



Exercice 2

1) $V_{n+1} = U_{n+2} - U_{n+1} = \frac{5}{4}U_{n+1} - \frac{1}{4}U_n - U_{n+1} = \frac{1}{4}(U_{n+1} - U_n) = \frac{1}{4}V_n$ donc V est une suite géométrique de raison $\frac{1}{4}$ et de premier terme $V_0 = \frac{5}{4} - 1 = \frac{1}{4}$.

2) On a $U_{n+1} - U_n = \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} > 0$ donc U est strictement croissante.

3) On a $U_1 - U_0 = \frac{1}{4}$

$$U_2 - U_1 = \left(\frac{1}{4}\right)^2$$

.....

$$U_n - U_{n-1} = \left(\frac{1}{4}\right)^n$$

En additionnant membre à membre ces égalités on obtient : $U_n = 1 + \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{4}\right)^n = \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{4}}$ d'où

$$U_n = \frac{4}{3} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n$$

4) On sait que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \frac{4}{3}$

5) a) $S_n = \sum_{p=0}^n \left[\frac{4}{3} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^p \right] = \left(\underbrace{\frac{4}{3} + \frac{4}{3} + \dots + \frac{4}{3}}_{(n+1) \text{ termes}} \right) - \frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{4}\right)^n \right) = \frac{4n}{3} + \frac{8}{9} + \frac{1}{9}\left(\frac{1}{4}\right)^n$

b) On sait que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{4n}{3} + \frac{8}{9} \right) = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = +\infty$



Exercice 3

1) $I\left(\frac{1}{2}, 0, 0\right), J\left(1, 0, \frac{1}{2}\right), L\left(0, 1, \frac{1}{2}\right)$ et $K\left(1, 1, \frac{1}{2}\right)$

2) $\vec{JL} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{JI} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \vec{JK} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{JI} \wedge \vec{JL} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

3) $\vec{JK} \cdot \vec{JL} = 0 \times (-1) + 1 \times 1 + 0 \times 0 = 1$

4) Soit V le volume de IJKL alors $V = \frac{1}{6} |(\vec{JI} \wedge \vec{JL}) \cdot \vec{JK}| = \frac{1}{6} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$

5) Soit S l'aire du triangle IJL alors $S = \frac{1}{2} \|\vec{JI} \wedge \vec{JL}\| = \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{4}$

6) Soit d la distance de K au plan (IJL) alors $V = \frac{1}{3} d \times S$ d'où $d = \frac{3V}{S} = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{\sqrt{3}}{4}} = \frac{1}{4} \times \frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

Exercice 4

1) $z_A = 1 + i, z_B = 4 + 2i$ et $z_C = 4i$

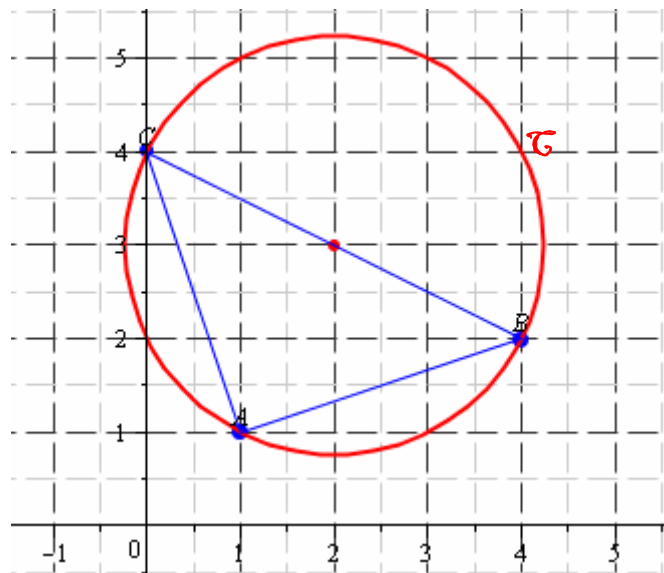
2) $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = \frac{4 + 2i - 1 - i}{4i - 1 - i} = \frac{3 + i}{-1 + 3i} = \frac{(3 + i)(-1 - 3i)}{(-1 + 3i)(-1 - 3i)} = \frac{-10i}{10} = -i$ donc $\left| \frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} \right| = |i| = 1$

3) On a $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = i \Leftrightarrow \frac{z_{AB}}{z_{AC}} \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$ de plus $AB = AC$ donc le triangle est rectangle et isocèle de sommet principal A.

4) a) On a $\frac{z_B + z_C}{2} = \frac{4 + 2i + 4i}{2} = 2 + 3i = z_I$ donc I est le milieu du segment [BC].

b) $IA = |z_A - z_I| = |1 + i - 2 - 3i| = |-1 - 2i| = \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}$

5) $M(z) \in \mathcal{C} \Leftrightarrow |z - 2 - 3i| = \sqrt{5} \Leftrightarrow |z_M - z_I| = \sqrt{5} \Leftrightarrow IM = IA \Leftrightarrow M$ appartient au cercle de centre I et de rayon IA donc $\mathcal{C}$ est le cercle circonscrit au triangle ABC.



Exercice 5

1) La fonction $t \mapsto \frac{1}{2 + \sin(t)}$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc la fonction U définie sur $\mathbb{R}$ par $U(x) = \int_0^x \frac{dt}{2 + \sin(t)}$ est sa seule primitive qui s'annule en 0. On donc $F(x) = U[\ln(|x|)]$ et comme la fonction $x \mapsto \ln(|x|)$ est définie sur $\mathbb{R}^*$ alors $D_F = \mathbb{R}^*$.

2) $\bullet$ Puisque $D_F = \mathbb{R}^*$, alors $x \in D_F \Leftrightarrow (-x) \in D_F$.

$\bullet$ $F(-x) = \int_0^{\ln(|-x|)} \frac{dt}{2 + \sin(t)} = \int_0^{\ln(|x|)} \frac{dt}{2 + \sin(t)} = F(x)$ donc f est paire.

3) a) Soit x un réel de $]0, 1[$ alors $\ln(|x|) = \ln(x) < 0$.

On sait que pour tout réel t , $-1 \leq \sin(t) \leq 1$ donc $1 \leq 2 + \sin(t) \leq 3$ donc $\frac{1}{3} \leq \frac{1}{2 + \sin(t)} \leq 1$ donc

$$\int_{\ln(x)}^0 \frac{dt}{3} \leq \int_{\ln(x)}^0 \frac{dt}{2 + \sin(t)} \leq \int_{\ln(x)}^0 dt \text{ donc } -\frac{\ln(x)}{3} \leq -F(x) \leq -\ln(x) \text{ donc } F(x) \leq \frac{\ln(x)}{3}$$

b) on a $\begin{cases} F(x) \leq \frac{\ln(x)}{3} \text{ pour tout } x \in]0, 1[\\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x)}{3} = -\infty \end{cases} \text{ donc } \lim_{0^+} F = -\infty$

4) a) Soit x un réel de $]1, +\infty[$ [donc $\ln(|x|) = \ln(x) > 0$.

On sait que pour tout réel t , $\frac{1}{3} \leq \frac{1}{2 + \sin(t)} \leq 1$ donc $\int_0^{\ln(x)} \frac{dt}{3} \leq \int_0^{\ln(x)} \frac{dt}{2 + \sin(t)} \leq \int_0^{\ln(x)} dt$ donc $\frac{\ln(x)}{3} \leq F(x) \leq \ln(x)$

b) On a $\begin{cases} F(x) \geq \frac{\ln(x)}{3} \text{ pour tout } x > 1 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{3} = +\infty \end{cases} \text{ donc } \lim_{+\infty} F = +\infty$

c) D'après ce qui précède on a $\frac{\ln(x)}{3} \leq F(x) \leq \ln(x)$ pour tout $x > 1$ donc pour tout $x > 1$ on a

$$\frac{\ln(x)}{3x} \leq \frac{F(x)}{x} \leq \frac{\ln(x)}{x} \text{ on a donc } \begin{cases} \frac{\ln(x)}{3x} \leq \frac{F(x)}{x} \leq \frac{\ln(x)}{x} \text{ pour } x > 1 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{3x} = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0 \end{cases} \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x)}{x} = 0 \text{ donc la courbe de } F \text{ admet}$$

une branche parabolique de direction l'axe des abscisses au voisinage de $+\infty$.

5) On a dit que $F(x) = U[\ln(|x|)]$ or la fonction $x \mapsto \ln(|x|)$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et U est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc F

est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et on a $F'(x) = \frac{1}{x} U'[\ln(|x|)] = \frac{1}{x(2 + \sin[\ln(|x|)])}$

6)

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$F'(x)$		-		+	
$F(x)$	$+\infty$		$-\infty$		$+\infty$



7)

