

Lycée : Echebbi Tadhman	Devoir de contrôle N°3	Prof : OUERGHY CHOKRI
Année scolaire : 2015/2016		Epreuve : MATHEMATIQUES
Classe: 4ème Technique 3		Durée :120mn

Exercice 1 (6 pts)

Pour chacune des questions suivantes une seule des trois réponses est exacte.

Ecrire sur la copie le numéro de la question et la lettre qui correspond à la bonne réponse (Aucune justification n'est demandée)

1) Une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto \frac{x}{x^2+1}$ est :

a) $x \mapsto \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1)$

b) $x \mapsto \ln(x^2 + 1)$

c) $x \mapsto 2 \ln(x^2 + 1)$

2) La fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $f(x) = \ln x - x$

a) Croissante sur $\mathbb{R}_+^*$

b) Décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$

c) N'est pas monotone sur $\mathbb{R}_+^*$

3) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x - x + 1}{x - 1}$ égale à

a) 0

b) 2

c) 1

4) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(e^x + 1)}{x}$ égale à

a) 0

b) $+\infty$

c) 1

5) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{x}$ égale à

a) 0

b) $+\infty$

c) 2

6) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{-x}}{1 + e^x}$ égale à

a) 0

b) $+\infty$

c) 1

Exercice 2 (8 pts)

1°) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (x + 2)e^{\frac{-1}{2}x}$

a) Calculer : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$

b) Interpréter graphiquement les résultats

2°) Déterminer les coordonnées des points E et F intersection de $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f avec respectivement l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées



- 3°) a) Etudier la dérivabilité de f sur $\mathbb{R}$
 b) Calculer $f'(x)$
 c) Dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$
- 4°) Montrer que $\mathcal{C}f$ admet un point d'inflexion K dont on déterminera les coordonnées
- 5°) Déterminer l'équation de la tangente au point E
- 6°) Tracer dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ $\mathcal{C}f$ la courbe représentative de la fonction f

Exercice 3 (6 pts)

L'espace est rapporté à un repère orthonormée directe $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

Soit la sphère (S) d'équation $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 8 = 0$ et le plan $\mathcal{P}$ d'équation
 $\mathcal{P}: x + 2y + z - 6 = 0$

- 1°) a) Déterminer le centre et le rayon de la sphère (S)
 b) Montrer que la sphère (S) et le plan $\mathcal{P}$ se coupe suivant un cercle (C)
 c) Déterminer l'équation paramétrique de la droite $\mathcal{D}$ passant par le centre de la sphère (S) et perpendiculaire à $\mathcal{P}$
 d) Déduire le rayon et les coordonnées du point T le centre du cercle (C)
- 2°) On désigne par : $A(2; 0; 2)$ et $B(2; 2; 0)$
 a) Vérifier que $A \in (S)$ et $A \notin \mathcal{P}$
 b) Montrer que $B \in (C)$
- 3°) a) Soit $\mathcal{Q}$ l'ensemble des points $M(x, y, z)$ de l'espace tel que $MA = MB$
 Montrer que $\mathcal{Q}$ est le plan d'équation $\mathcal{Q}: y = z$
 b) Montrer que les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ se coupe suivant la droite Δ d'équation paramétrique
$$\begin{cases} x = 6 - 3\alpha \\ y = \alpha \\ z = \alpha \end{cases}, \alpha \in \mathbb{R}$$

Correction du devoir de contrôle N°3

Exercice 1 (6 pts)

1°) $\left[\frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) \right]' = \frac{1}{2} \left(\frac{2x}{x^2+1} \right) = \frac{x}{x^2+1}$ la réponse (a) [1]

2°) $f'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}$; $f'(x) > 0$ si $x < 1$ et $f'(x) < 0$ si $x > 1$ la réponse (c) [1]

3°) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x - x + 1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x - \ln 1}{x-1} + \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-x+1}{x-1} = 1 + (-1) = 0$ la réponse (a) [1]

4°) On pose $t = e^x$ éq. $x = t$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(e^x + 1)}{x} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln(t+1)}{\ln t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln \left[t \left(1 + \frac{1}{t} \right) \right]}{\ln t}$
 $= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln t + \ln \left(1 + \frac{1}{t} \right)}{\ln t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left[\frac{\ln t}{\ln t} + \frac{\ln \left(1 + \frac{1}{t} \right)}{\ln t} \right] = 1 + \lim_{t \rightarrow +\infty} \left[\ln \left(1 + \frac{1}{t} \right) \times \frac{1}{\ln t} \right] = 1 + 0 \times 0 = 1$ la réponse (c) [1]

5°) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - e^{-x} + 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - 1) - (e^{-x} - 1)}{x}$
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^0}{x - 0} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x} - e^0}{x - 0} = 1 - (-1) = 2$ la réponse (c) [1]

6°) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{-x}}{1+e^x} = \frac{+\infty}{1} = +\infty$ la réponse (b) [1]

Exercice 2 (8 pts)

1°) a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x+2)e^{\frac{-1}{2}x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{\frac{-1}{2}x} + 2 e^{\frac{-1}{2}x}$

On pose $t = \frac{1}{2}x$ éq. $x = 2t$; $\lim_{t \rightarrow +\infty} (2te^{-t} + 2e^{-t}) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(2 \frac{t}{e^t} + 2e^{-t} \right)$
 $= \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(2 \frac{1}{\frac{e^t}{t}} + 2e^{-t} \right) = 2 \times \frac{1}{+\infty} + 2 \times 0 = 0$ [1]

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x+2)e^{\frac{-1}{2}x} = -\infty \times +\infty = -\infty$ [0,5]

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x+2)}{x} e^{\frac{-1}{2}x} = 1 \times +\infty = +\infty$ [0,5]

1°) b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ Donc : la droite d'équation $y = 0$ est une asymptote horizontale à $\mathcal{C}_f$ [0,5]

$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty \end{cases}$ Donc $\mathcal{C}_f$ admet une branche parabolique de direction (oj) au voisinage de $-\infty$ [0,5]

2°) $f(0) = (0+2)e^0 = 2$ donc $F(0; 2)$ [0,5]

$f(x) = (x+2)e^{\frac{-1}{2}x} = 0$ éq. $x+2 = 0$ éq. $x = -2$ donc $E(-2; 0)$ [0,5]

3°) a) $x \mapsto x+2$ fonction dérivable sur $\mathbb{R}$; $x \mapsto e^{\frac{-1}{2}x}$ fonction dérivable sur $\mathbb{R}$

Donc f donc dérivable sur $\mathbb{R}$ comme étant produit de deux fonctions dérivable sur $\mathbb{R}$ [0,5]

b) Pour $x \in \mathbb{R}$; $f'(x) = e^{\frac{-1}{2}x} + (x+2) \left(-\frac{1}{2}\right) e^{\frac{-1}{2}x} = e^{\frac{-1}{2}x} \left(1 - \frac{(x+2)}{2}\right) = \frac{-x}{2} e^{\frac{-1}{2}x}$ [0,75]

c) $f'(x) = 0$ éq. $x = 0$ [0,5]

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f'	+	0	-
f	$-\infty$	2	0

4°) $x \mapsto \frac{-x}{2}$ fonction dérivable sur $\mathbb{R}$; $x \mapsto e^{\frac{-1}{2}x}$ fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ [1]

Donc f' donc dérivable sur $\mathbb{R}$ comme étant produit de deux fonctions dérivable sur $\mathbb{R}$

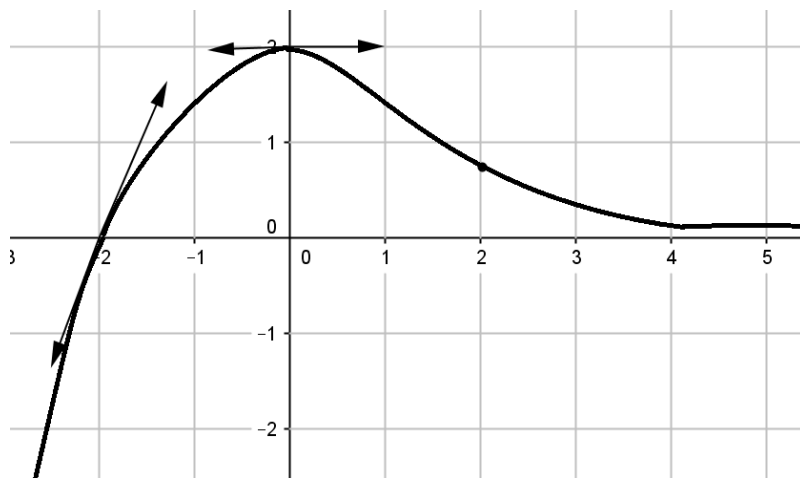
Et Pour $x \in \mathbb{R}$; $f''(x) = \frac{-1}{2} e^{\frac{-1}{2}x} + \frac{x}{4} e^{\frac{-1}{2}x} = \frac{-1}{2} e^{\frac{-1}{2}x} \left(1 - \frac{1}{2}x\right)$) $f''(x) = 0$ éq. $x = 2$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
f''	-	0	+

d'où $K(2; 4e^{-1})$ est un point d'inflexion pour $\mathcal{C}_f$

5°) $y = (x+2)f'(-2) + f(-2) = (x+2)(e) = ex + 2e$ [0, 5]

6°)



[0,75]

Exercice 3 (6 pts)

1°) a) $(S) : x^2 + y^2 + z^2 - 8 = 0$ éq. $x^2 + y^2 + z^2 = 8 = (2\sqrt{2})^2$ d'où (S) est une sphère de centre $O(0,0,0)$ et de rayon $R = 2\sqrt{2}$ [0,75]

b) $d(O, P) = \frac{|1 \times 0 + 2 \times 0 + 1 \times 0 - 6|}{\sqrt{6}} = \frac{6}{\sqrt{6}} = \sqrt{6} < 2\sqrt{2}$ d'où (S) et $\mathcal{P}$ se coupe suivant un cercle de rayon r
 $r = \sqrt{8 - 6} = \sqrt{2}$ et de centre est le projeté de O sur $\mathcal{P}$ [0,75]



$$c) \mathbf{D} = (O, \vec{n}_p) \text{ avec } O(0, 0, 0) \text{ et } \vec{n}_p \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{D} : \begin{cases} x = \alpha \\ y = 2\alpha \\ z = \alpha \end{cases} \quad \alpha \in \mathbb{R} \quad [0, 5]$$

$$d) T(x, y, z) \in D \cap P \text{ éq. } \begin{cases} x = \alpha \\ y = 2\alpha \\ z = \alpha \\ x + 2y + z - 6 = 0 \end{cases} \quad \alpha \in \mathbb{R} \quad \text{éq. } \begin{cases} x = \alpha \\ y = 2\alpha \\ z = \alpha \\ 6\alpha - 6 = 0 \end{cases} \quad \text{éq. } \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 1 \\ \alpha = 1 \end{cases} \quad \text{donc } T(1, 2, 1) \quad [1]$$

$$\text{Or } OT = \sqrt{1 + 4 + 1} = \sqrt{6} \quad \text{d'où } r = \sqrt{R^2 - OT^2} = \sqrt{8 - 6} = \sqrt{2}$$

$$2^\circ) a) 2^2 + 0^2 + 2^2 - 8 = 0 \quad \text{donc } A \in (S) \quad \text{et} \quad 2 + 0 + 2 - 6 = -2 \neq 0 \quad \text{donc } A \notin \mathcal{P} \quad [0, 5]$$

$$b) 2^2 + 2^2 + 0 - 8 = 0 \quad \text{donc } B \in (S) \quad \text{et} \quad 2 + 4 + 0 - 6 = 0 \quad \text{donc } B \in \mathcal{P} \quad \text{donc } B \in (C) \quad [0, 5]$$

$$3^\circ) a) M(x, y, z) \in Q \text{ éq. } MA = MB \text{ éq. } . MA^2 = MB^2 \text{ éq. } (x - 2)^2 + y^2 + (z - 2)^2 = (x - 2)^2 + (y - 2)^2 + z^2$$

$$\text{éq. } y = z \quad \text{d'où : } \mathcal{Q} \text{ est le plan d'équation } \mathcal{Q} : y = z \quad [1]$$

$$b) \vec{n}_p \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \vec{n}_Q \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \neq \vec{0} \quad \text{donc } \mathcal{P} \text{ et } \mathcal{Q} \text{ se coupe suivant la droite } \Delta$$

$$\text{d'équation paramétrique : } \begin{cases} x + 2y + z - 6 = 0 \\ y = z \end{cases}, \quad \text{soit } y = \alpha \quad (\alpha \in \mathbb{R}) \quad \text{d'où } \Delta : \begin{cases} x = 6 - 3\alpha \\ y = \alpha \\ z = \alpha \end{cases}, \quad \alpha \in \mathbb{R} \quad [1]$$