

EXERCICE 1 (3 PTS)

Répondre par **vrai** ou **faux** à chacune des propositions suivantes . Aucune justification n'est demandée

Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{x}{2} - \frac{1}{\ln(\sqrt{x})}$, D son ensemble de définition et C sa courbe représentative.

- 1) On a $D =]0, +\infty[$.
- 2) La courbe C admet une droite asymptote en $+\infty$.
- 3) Pour tout $x \in D$, on a : $f(x) < \frac{x}{2}$.
- 4) Pour tout $x \in D$, on a : $f'(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{x(\ln x)^2}$.

EXERCICE 2 (5 PTS)

On considère la suite (u_n) définie, pour tout entier naturel n non nul, par : $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

- 1) On considère la fonction f définie sur $[0 ; +\infty[$ par : $f(x) = x - \ln(1+x)$.
 - a) En étudiant les variations de la fonction f , montrer que, pour tout réel x positif ou nul, $\ln(1+x) \leq x$.
 - b) En déduire que, pour tout entier naturel n non nul, $\ln(u_n) \leq 1$.
- 2) On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n non nul, par : $v_n = \ln(u_n)$.
 - a) On pose $x = \frac{1}{n}$. Exprimer v_n en fonction de x .
 - b) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$ puis $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

EXERCICE 3 (5 PTS)

L'espace E est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère les points $S(1,1,2)$, $A(-3,0,0)$, $B(1,0,-2)$ et $C(-1,1,0)$.

- 1) Montrer que les points A , B et C déterminent un plan P d'équation : $x - 2y + 2z + 3 = 0$
- 2) Soit Q l'ensemble des points M de E vérifiant $(\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BS}) \cdot \overrightarrow{SM} = 0$.
 - a) Montrer que Q est un plan dont on donnera une équation cartésienne.
 - b) Montrer que P coupe Q suivant une droite Δ dont on donnera une représentation paramétrique.
 - c) Calculer la distance du point A à la droite Δ .
- 3)
 - a) Vérifier que $SABC$ est un tétraèdre puis calculer son volume V .
 - b) Calculer l'aire A du triangle SAC puis déduire la distance du point B au plan (SAC) .
- 4) Soit Γ l'ensemble des $M(x,y,z)$ tels que : $x^2 + y^2 + z^2 + 7y - 2z - 9 = 0$
 - a) Montrer que Γ est une sphère dont on précisera le rayon R et les coordonnées de son centre.
 - b) Montrer que Γ est une sphère circonscrite au tétraèdre $SABC$.
 - c) Montrer que P coupe Γ suivant un cercle que l'on caractérisera.



EXERCICE 4 (7 PTS)

Soit f la fonction $[0, +\infty[$ définie sur par : $f(x) = (e^{-x} - 1)^2$. On désigne par (ζ) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan (unité : 2cm).

- 1) a) Montrer que pour tout $x \in [0, +\infty[: f'(x) = 2e^{-x}(1 - e^{-2x})$.
b) Dresser le tableau de variation de f .
- 2) a) Tracer (ζ) .
b) Calculer en cm^2 , l'aire A de la partie du plan limitée par la courbe (ζ) et les droites d'équations $y = 0$, $x = 0$ et $x = 1$.
- 3) a) Montrer que f réalise une bijection de $[0, +\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera.
b) Tracer dans le même repère la courbe (ζ') de la fonction réciproque f^{-1} de f .
c) Calculer en cm^2 , l'aire de la partie du plan limitée par les courbes (ζ) , (ζ') et les droites d'équations : $x = 1$ et $y = 1$.
- 4) a) Montrer que : $\forall x \in [0; 1[: f^{-1}(x) = -\ln(1 - \sqrt{x})$.
b) Montrer que : f^{-1} est dérivable sur $]0; 1[$ et déterminer $(f^{-1})'(x)$.
- 5) On pose : $I_\alpha = \int_\alpha^{\frac{1}{4}} \frac{1}{\sqrt{x} - x} dx$ où α est un réel de $]0; 1[$.
a) Montrer que $I_\alpha = 2 \ln 2 - 2f^{-1}(\alpha)$.
b) Calculer : $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} I_\alpha$

