

Devoir de controle n°3

Proposé par : Riadh ZACHOUANI

EXERCICE 1 (2 points)

1. La durée de vie d'un robot, exprimée en années, jusqu'à ce que survienne la première panne est une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre λ , avec $X > 0$. Ainsi, la probabilité qu'un robot tombe en panne avant l'instant t est égale à

$$P(X \leq t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} dx$$

La probabilité $p(X > 6)$ est égale à 0,3 alors λ est égale à :

- a. 0,4 b. 0,2 c. 0,3 d. 0,1

2. La valeur moyenne de la fonction f définie sur $[0; \pi]$ par : $f(x) = \sin x$ est égale à :

- a. $\frac{2}{\pi}$ b. $\frac{\pi}{2}$ c. $\frac{\pi}{4}$ d. 2π

3. $\int_1^e \frac{(\ln x)^2}{x} dx$ est égale à :

- a. $\frac{2}{3}$ b. $\frac{1}{2}$ c. $\frac{1}{4}$ d. $\frac{1}{3}$

4. On considère la courbe représentant la fonction tangente sur $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$. Le volume que l'on obtient par rotation autour de l'axe (Ox) est égal à :

- a. $\frac{\pi(\pi-4)}{4}$ b. $\frac{\pi(4-\pi)}{4}$ c. $\frac{\pi}{4}$ d. $\frac{4-\pi}{4}$

EXERCICE 2 (5 points)

Dans une usine, à la fin d'une chaîne de fabrication, on effectue deux tests de qualité T_1 et T_2 .

Chaque pièce fabriquée sur la chaîne subit les deux tests.

95% des pièces fabriquées sur la chaîne réussissent le test T_1 .

Parmi les pièces ayant réussi le test T_1 , 99% réussissent le test T_2 .

Parmi les pièces ayant échoué au test T_1 , 98% réussissent le test T_2 .

Etant donnée une pièce, on note T_1 l'évènement « la pièce réussit le test T_1 » et T_2 « la pièce réussit le test T_2 ».



Devoir de controle n°3

Proposé par : Riadh ZACHOUANI

Les résultats seront donnés à 10^{-4} près.

1.
 - a. Calculer la probabilité de l'évènement S : « la pièce franchit avec succès les deux tests ».
 - b. Calculer la probabilité qu'une pièce réussisse le test T_2 .
 - c. Les évènements T_1 et T_2 sont-ils indépendants ?
 - d. On choisit une pièce ayant réussi le test T_2 . Quelle est la probabilité qu'elle ait réussi le test T_1 ?
2. Les pièces ayant réussi les deux tests, sont commercialisées au prix de 10 dinars. Celles n'ayant réussi que l'un des deux tests sont vendues au prix promotionnel de 5 dinars. Les autres sont jetées.
Etant donnée une pièce, on note X la variable aléatoire correspondants à son prix de vente.
 - a. Donner (sous forme d'un tableau) la loi de probabilité de X.
 - b. Calculer l'espérance $E(X)$ de X. Interpréter.
3. Dans cette question, on suppose que la probabilité $P(S)$ qu'une pièce ait réussi les deux tests est égale à 0,9405. On dispose d'un carton de 10 pièces dont on ignore la qualité. On note Y la variable aléatoire égale au nombre de pièces du carton qui ont réussi les deux tests.
 - a. Calculer la probabilité que les 10 pièces aient réussi les deux tests.
 - b. Calculer la probabilité qu'exactly 7 pièces aient réussi les deux tests.
 - c. Calculer la probabilité qu'au moins une pièce ait réussi les deux tests.
 - d. Calculer l'espérance $E(Y)$ de Y. Interpréter.

EXERCICE 3 (6 points)

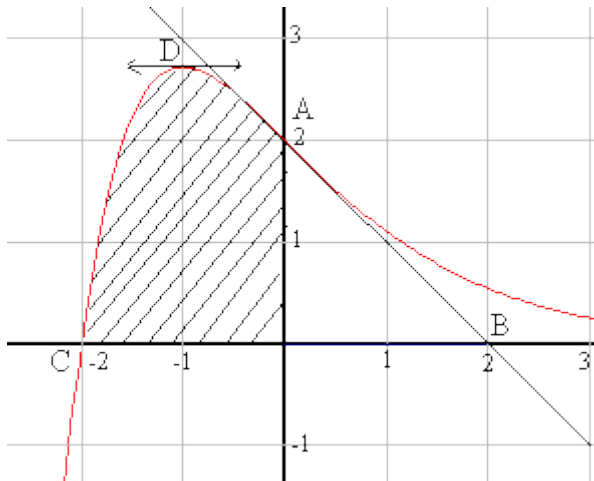
On a représenté ci-dessous la courbe représentative Γ , dans un repère orthonormal, d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$. La courbe Γ passe par les points A(0 ; 2) et C(-2 ; 0) et la droite (AB) est la tangente en A à Γ .

La tangente à Γ en son point D d'abscisse -1 est parallèle à l'axe des abscisses.



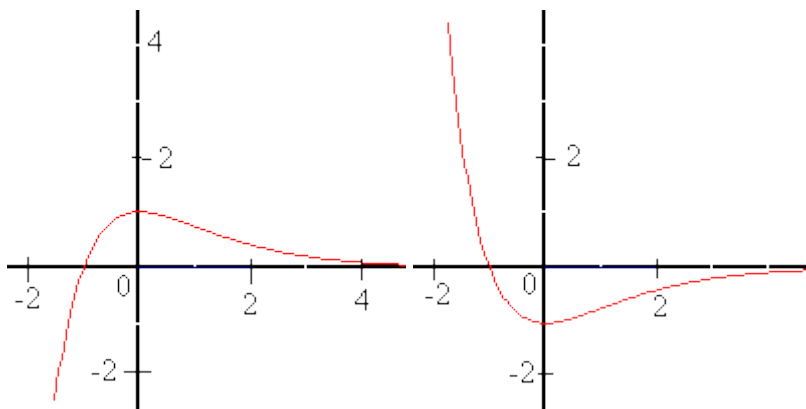
Devoir de controle n°3

Proposé par : Riadh ZACHOUANI

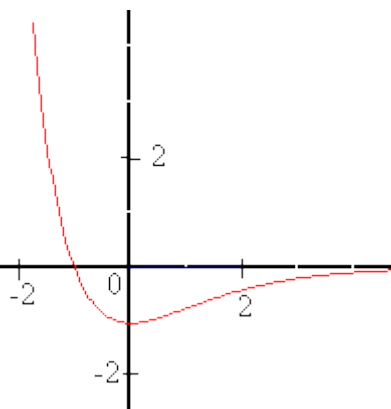


1. Parmi les trois représentations graphiques ci-dessous, une représente la fonction dérivée f' de f et une autre représente une primitive F de f sur $\mathbb{R}$.

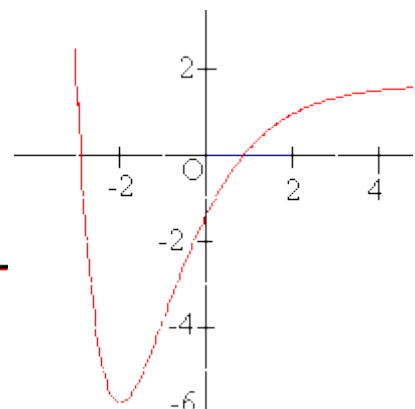
Courbe 1



Courbe 2



Courbe 3



Déterminer la courbe associée à la fonction f' et celle qui est associée à la fonction F .

Vous expliquerez avec soin les raisons de votre choix

2. a. Déterminer, à l'aide des renseignements fournis par l'énoncé, les valeurs de $f(0)$ et de $f'(0)$.

b. On suppose que $f(x)$ est de la forme $f(x) = (x + K)e^{ax}$ où K et a sont des constantes réelles.

Calculer $f'(x)$ puis traduire les renseignements trouvés à la question précédente par un système d'équations d'inconnues K et a .

En déduire que f est définie par $f(x) = (x + 2)e^{-x}$.

3. a. Montrer que la fonction définie par $\Phi(x) = (-x-3)e^{-x}$ est une primitive de f .

b. En déduire la valeur de l'aire, exprimée en unités d'aire, de la surface



Devoir de controle n°3

Proposé par : Riadh ZACHOUANI

hachurée. On donnera la valeur exacte puis la valeur arrondie au centième du résultat.

EXERCICE 4 (7 points)

Partie A : étude d'une fonction

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par $f(x) = x \ln(x+1)$.

Sa courbe représentative (C) dans un repère orthogonal $(O; \vec{i}; \vec{j})$ est donnée en annexe,

1. a) Montrer que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

b) L'axe des abscisses est-il tangent à la courbe (C) au point O ?

2. On pose

$$I = \int_0^1 \frac{x^2}{x+1} dx$$

a) Déterminer trois réels a , b et c tels que, pour tout $x \neq -1$,

$$\frac{x^2}{x+1} = ax + b + \frac{c}{x+1}$$

b) Calculer I.

3. A l'aide d'une intégration par parties et du résultat obtenu à la question 2, calculer, en unités d'aires, l'aire A de la partie du plan limitée par la courbe (C) et les droites d'équations $x=0$, $x=1$ et $y=0$.

4. Montrer que l'équation $f(x) = 0,25$ admet une seule solution sur l'intervalle $[0;1]$.

On note α cette solution. Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2} .

Partie B : étude d'une suite

La suite (u_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par

$$u_n = \int_0^1 x^n \ln(x+1) dx$$

1. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n) . La suite (u_n) converge-t-elle ?

2. Démontrer que pour tout entier naturel n non nul,

$$0 \leq u_n \leq \frac{\ln 2}{n+1}$$



Devoir de controle n°3

Proposé par : Riadh ZACHOUANI

En déduire la limite de la suite (u_n) .

