

Exercice n°1 (4pts)

On donne le nombre complexe $Z = \sqrt{2 + \sqrt{2}} + i\sqrt{2 - \sqrt{2}}$

1)a) donner la forme algébrique de Z^2

b) déduire la forme exponentielle de Z^2

2) déduire la forme exponentielle de Z

3) donner les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$

Exercice n°2 (6pts)

le plan est muni du repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$ on considère les points A et B d'affixes respectives $z_A = 1$ et $z_B = -i$ $M(z \neq -i)$ on associe le point $M'(z')$; $z' = \frac{1-z}{1-iz}$

1) prouver que $|z'| = \frac{AM}{BM}$

2) déduire l'ensemble des points $M(z)$ tel que $|z'| = 1$

3) déterminer l'ensemble des points $M(z)$ tel que z' est réel

4)a) vérifier que $(z' + i)(z + i) = -1 + i$ puis déduire $BM \cdot BM' = \sqrt{2}$ et $(\vec{u}, \widehat{BM}) + (\vec{u}, \widehat{BM'}) \equiv \frac{3\pi}{4} [2\pi]$

b) déterminer l'ensemble des points $M'(z')$ lorsque le point M décrit le cercle $\zeta_{(B;1)}$

c) déterminer l'ensemble des points $M'(z')$ lorsque le point M décrit la demi-droite $[O; \vec{u})$

Exercice n°3 (6,5pts)

Soit la fonction f sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 + 3} - 3 & \text{si } x < 1 \\ 2x - 3 + \frac{2}{x} \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$ on désigne par (C_f) sa représentation graphique dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1)a) calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$

b) Montrer que $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) + x] = -3$ puis interpréter le résultat géométriquement

2)a) montrer que pour tout $x \in [1; +\infty[$ on a : $2x - 4 \leq f(x) \leq 2x - 2$

b) en déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$

3)a) montrer que f est continue en 1

b) prouver que f est continue sur $\mathbb{R}$

4) a) montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution $\alpha \in]1; 2[$

b) vérifier que $\cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) = \frac{3}{2}\alpha - \alpha^2$



Exercice n°4(3,5pts)

la figure suivante est la représentation graphique dans un repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$
d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$

- (cf) admet une tangente horizontale au point $A(-1; 2,7)$
- La tangente à (cf) au point $B(0; 2)$ passe par le point $D(2; 0)$
- l'axe des abscisses est une asymptote horizontale à (cf) au voisinage de $(+\infty)$
- (cf) admet une branche parabolique de direction $(o, \vec{j})$ au voisinage de $(-\infty)$

par lecture graphique :

déterminer:

1)a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \dots\dots\dots$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \dots\dots\dots$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \dots\dots\dots$$

b) $f(-2) = \dots\dots\dots$

$$f'(-1) = \dots\dots\dots$$

$$f'(0) = \dots\dots\dots$$

2) dresser le tableau de variation de f

3) la fonction h est restriction de f sur $[-1; +\infty[$

montrer que l'équation $h(x) = 1$ admet une unique solution α

.....
.....
.....
.....

4) soit la fonction g définie par $g(x) = \frac{1}{f(x)}$

a) déterminer le domaine de définition de $g : Dg = \dots\dots\dots$

b) déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \dots\dots\dots$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \dots\dots\dots$$



