

Exercice 1 : (4)

Pour chaque question répondre par vrai ou faux **en justifiant votre réponse**

- 1) Soit z un nombre complexe tel que $|z| = 2$ alors $\left|z - \frac{1}{z}\right| = \frac{1}{2}$.
- 2) $\left|1 + e^{2i\frac{\pi}{3}}\right| = \sqrt{2}$
- 3) Soit, $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, 0\right[$ alors la forme exponentielle de $z = 1 - e^{i\theta}$ est $z = -2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\left(\frac{\theta+\pi}{2}\right)}$
- 4) Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) - x^2$ alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{1}{2}$.
- 5) Soit la fonction f définie sur $[1, +\infty[$ par $f(x) = 1 + \frac{1}{\sqrt{x}}$ alors la fonction $f(x) = x$ admet une unique solution $\alpha \in [1, +\infty[$

Exercice 2 : (6)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$

Soit A , B et C trois points d'affixes $z_A = 1 + i\sqrt{3}$; $z_B = 2i$ et $z_C = z_A + z_B$

- 1) a) Ecrire z_A sous la forme exponentielle
b) Placer B et construire A
- 2) a) Montrer que $OACB$ est un losange. Puis placer le point C
b) Calculer l'aire de $OACB$
- 3) Soit Γ le cercle de centre A et passant par O et D le point d'affixe $z_D = 2i\sqrt{3}$
a) Montrer que $D \in \Gamma$
b) Placer le point D . justifier votre réponse
- 4) Soit l'application $f: P \rightarrow P$

$$M(z) \rightarrow M'(z') \text{ tel que } z' = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)z$$

- a) Déterminer l'affixe du point D' image de D par f
- b) Montrer que ODD' est un triangle isocèle
- c) Montrer que C, D et D' sont alignés
- d) En déduire une construction du point D' .

Exercice 3 : (5,5)

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{1+\sqrt{x}\cos(x)}{x+2} & \text{si } x \geq 0 \\ f(x) = \frac{x^2}{4(\sqrt{x^2+1}-1)} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

- 1) Montrer que f est continue en 0
- 2) a) Montrer que pour tout $x \geq 0$ on a : $\frac{1-\sqrt{x}}{x+2} \leq f(x) \leq \frac{1+\sqrt{x}}{x+2}$
b) Calculer alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. Interpréter graphiquement le résultat
- 3) a) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[f(x) + \frac{1}{4}x\right]$
b) Interpréter graphiquement le résultat
- 4) a) Montrer que $f(x) = 0$ admet au moins une solution α dans $\left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$
b.) Montrer que $\tan(\alpha) = -\sqrt{\alpha-1}$



Exercice 4 : (4, 5)

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$ et z un nombre complexe non nul

M et M' d'affixes respectives z et z' tel que $z' = -\frac{1}{\bar{z}}$

Montrer que les points O, M et M' sont alignés

- 1) Montrer que $\overline{z' + 1} = \frac{1}{z}(z - 1)$
- 2) Soit A et B les points d'affixes respectives 1 et -1 . On désigne par $(\mathcal{C})$ le cercle de centre A et de rayon OA et $M(z)$ un point de $(\mathcal{C})$
 - a) Vérifier que $|z - 1| = 1$
 - b) Montrer que $|z' + 1| = |z'|$ et interpréter géométriquement cette égalité
 - c) Dédire de ce qui précède une construction géométriquement du point M' à partir de M
- 3) On suppose que $z \neq 1$ et M_1 le symétrique de M par rapport à $(O, \vec{u})$
 - a) On pose $a = \frac{z' + 1}{z' - 1}$. Exprimer a en fonction de $\bar{z}$
 - b) Donner une interprétation géométrique de $\text{Arg}(a)$

