

Devoir de contrôle N°1

Saidani moêz

06/11/2014

4T3

EXERCICE N°1 (3pts)

Cocher la bonne réponse (sans justification)

$\lim_{0^+} \frac{\sqrt{x^2+9}-3}{x} =$	0	$+\infty$	$-\infty$
l'équation $x^3 + 3x + 2 = 0$ admet une solution unique α dans	$] -1, -0.9[$	$] -0.8, -0.7[$	$] -0.6, -0.5[$
un argument de nombre complexe $z = \frac{1+i}{\sqrt{3}+i}$	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{7\pi}{12}$

EXERCICE N°2 (4pts)

Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{4-x^2}}{4} & \text{si } 0 < x \leq 2 \\ x - \frac{4}{x} & \text{si } 2 < x \end{cases}$

On note ξ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan

- (a) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$. et interpréter graphiquement le résultat obtenu;
(b) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x)$. interpréter graphiquement le résultat obtenu.
- Montrer que f est continue en 2
- Etudier la dérivabilité de f en 2

EXERCICE N°3 (4pts)

- Soit l'équation $(E) : z^2 - (2 + 3i)z - 2 + 2i = 0$
 - Ecrire sous la forme algébrique $(2 + i)^2$
 - Résoudre alors l'équation (E) .
- Soit l'équation $(E') : z^3 - (3 + 2i)z^2 + 3(1 + i)z - 2 + 2i = 0$
 - Vérifier que $(1 - i)$ est une solution de (E')
 - Résoudre alors l'équation (E')

EXERCICE N°4 (6pts)

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

On désigne par A, B et C les points d'abscisses respectives $z_A = 2 - 3i$, $z_B = i$ et $z_C = 6 - i$.

On réalisera une figure que l'on complètera au fur et à mesure des questions.

On considère l'application f qui, à tout M d'abscisse z distincte de i associe le point M' d'abscisse z' telle que

$$z' = \frac{i(z - 2 + 3i)}{z - i}.$$

- Calculer $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$. En déduire la nature du triangle ABC .



2. Soit E le point d'affixe $2i$.

(a) Montrer que $f(E) = E$.

(b) Démontrer que $E \in (AB)$.

3. (a) Montrer que pour tout M distinct du point B , $OM' = \frac{AM}{BM}$.

(b) En déduire l'ensemble des points M d'affixe z tels que $|z'| = 1$.

(c) Démontrer que si le point M appartient à la médiatrice du segment $[AB]$ alors le point M' appartient à un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

4. Démontrer que pour tout point M distinct de A et B , on a $\left(\widehat{\vec{i}, \vec{OM}'}\right) = \left(\widehat{\vec{BM}, \vec{AM}}\right) + \frac{\pi}{2} + 2\pi k$,
 $k \in \mathbb{Z}$.

Exercice N°5 (3pts)

1. Montrer que pour tout x et y appartenant à $\left[-\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{12}\right]$, $|\cos^2 x - \cos^2 y| \leq \frac{1}{2} |x - y|$.

2. Montrer que pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, $x \leq \tan x \leq 2x$.