

Exercice :1 (6 pts)

- 1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 + \sqrt{3}z + 1 = 0$.
- 2) Soit dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^3 + (\sqrt{3} - i)z^2 + (1 - i\sqrt{3})z - i = 0$.
 - a- Montrer que l'équation (E) admet une solution imaginaire z_0 .
 - b- Résoudre (E).
- 3) On donne dans le plan complexe les points A et B d'affixes respectives

$$z_A = i ; z_B = \frac{-\sqrt{3} + i}{2} \text{ et } z_C = \frac{-\sqrt{3} - i}{2}.$$
 - a- Déterminer la forme exponentielle de z_A, z_B et z_C .
 - b- Représenter dans un repère $(O; \vec{u}; \vec{v})$ les points A, B et C.
 - c- Déterminer le module et un argument du quotient : $\frac{z_C - z_B}{z_A - z_B}$.
 - d- En déduire la nature du triangle ABC.

Exercice :2 (4 pts)

$$\text{Soit } g(x) = \begin{cases} 2x + \frac{\cos x}{x} & \text{si } x < 0 \\ \sqrt{x^2 + 1} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}.$$

- 1) déterminer le domaine de définition de g.
- 2) a- Montrer que pour tout $x < 0$ on a : $2x + \frac{1}{x} \leq g(x) \leq 2x - \frac{1}{x}$.
 b- En déduire $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$.
 c- Montrer que la droite d'équation $y = 2x$ est une asymptote à C_f au voisinage de $-\infty$.
- 3) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x)$. Interpréter le résultat graphiquement.
- 4) Trouver la nature de la branche infinie de C_f au voisinage de $+\infty$

Exercice :3 (4 pts)

Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{x - \sin x}{1 + x^2}$.

- 1) a- montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\frac{x - 1}{1 + x^2} \leq f(x) \leq \frac{x + 1}{1 + x^2}$.
 b- en déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
 c- interpréter graphiquement les deux résultats obtenus.
- 2) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution $\alpha \in [-1 ; 1]$

Exercice :4 (6 pts)

Dans le plan complexe rapporté à un repère o.n. $(O; \vec{u}; \vec{v})$, on désigne par A, B et C les points d'affixes respectives : $z_1 = -2$, $z_2 = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$ et $z_3 = \sqrt{2} - i\sqrt{2}$.

- 1) a- Ecrire les nombres z_1, z_2 et z_3 sous forme trigonométrique.
 b- Montrer que A, B et C appartiennent au cercle de centre O et de rayon 2.
 c- Placer alors les points A, B et C dans le repère $(O; \vec{u}; \vec{v})$.
- 2) a- Déterminer l'affixe de point I milieu du segment [AB].
 b- Calculer OI et la mesure de l'angle $(\vec{u}; \overrightarrow{OI})$.
 c- En déduire le module et un argument de l'affixe de I.
- 3) Evaluer alors les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{5\pi}{8}\right)$ et $\sin\left(\frac{5\pi}{8}\right)$