

Veuillez présenter une copie propre et des réponses bien rédigées.

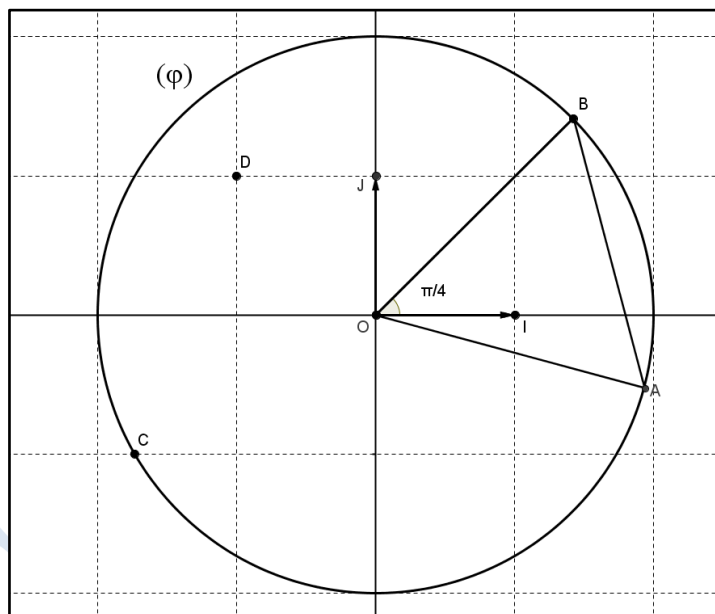
Exercice n°1.....(5 pts)

Dans la figure ci-contre :

- (φ) est le cercle de centre O et de rayon 2 et il passe par les points A, B et C .
- Le repère $\left(O, \vec{OI}, \vec{OJ}\right)$ est orthonormé direct.
- Le triangle OAB est équilatéral.

A) Répondre par vrai ou faux aux assertions suivantes sans justification :

1. Un argument de z_D est $\frac{3\pi}{4}$.
2. La forme exponentielle de z_C est $e^{-i\frac{5\pi}{6}}$.
3. Le point d'affixe $-5\overline{z_B}$ est sur la demi-droite $[OD)$.



B) Choisir la réponse exacte pour chaque énoncé :

1. La forme exponentielle de z_A est :

a) $2e^{-i\frac{\pi}{6}}$. **b)** $2e^{-i\frac{\pi}{8}}$. **c)** $2e^{-i\frac{\pi}{12}}$.

2. L'affixe du milieu H de $[AB]$ est :

a) $\frac{3}{2}e^{i\frac{\pi}{8}}$. **b)** $\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{12}}$. **c)** $\frac{3}{2}e^{i\frac{\pi}{12}}$.

Exercice n°2.....(6 pts)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$. On donne les points $A(-1)$, $B(-2)$ et $C(i)$.

A tout point M d'affixe $z \neq -i$, on associe le point M' dont l'affixe est $z' = \frac{i(z+2)}{z+1}$.

1. Déterminer l'affixe c' du point C' associé au point C .
2. Déterminer et construire les ensembles suivants :

$$E = \{ M(z) \text{ tels que } z' \text{ est réel} \}; F = \{ M(z) \text{ tels que } z' \text{ est imaginaire} \} \text{ et } G = \{ M(z) \text{ tels que } |z| = 1 \}$$

3. **a)** Montrer que $z' - i = \frac{i}{z+1}$.

b) En déduire que $CM' \cdot AM = 1$ et que $\left(\vec{u} \wedge \vec{CM'}\right) + \left(\vec{u} \wedge \vec{AM}\right) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] (M \neq B)$

- c) Déterminer l'ensemble (Γ) du plan sur lequel varie le point M' lorsque M varie sur le cercle $(\mathcal{C})$ de centre A et de rayon 1.

Exercice n°3.....(4 pts)

On considère la fonction f définie sur $[-1, +\infty[$ par: $f(x) = \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = \frac{1}{2}$.

On désigne par $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Montrer que f est continue en 0 et justifier la continuité de f sur $[-1, +\infty[$.
2. a) Montrer que $\forall x \in [-1, +\infty[; f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x} + 1}$.
b) Etudier la dérivabilité de f en 0. Interpréter graphiquement le résultat.
3. Montrer que f n'est dérivable à droite en -1 et interpréter graphiquement le résultat.
4. Préciser la nature de la branche infinie de $(\mathcal{C})$ au voisinage de $+\infty$.

Exercice n°4.....(5 pts)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \begin{cases} 2x^3 + x + 2 & \text{si } x \leq 0 \\ 2 + \frac{1 - \cos 2x}{x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$.

On désigne par $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Montrer que f est continue en 0.
2. Montrer que f est dérivable à droite en 0 et donner une équation de sa demi-tangente au point $A(0,2)$.
3. a) Etudier la branche infinie de $(\mathcal{C})$ au voisinage de $-\infty$.
b) Montrer que $\forall x \in]0, +\infty[; 2 \leq f(x) \leq 2 + \frac{2}{x}$.
c) En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et interpréter graphiquement le résultat.
4. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet dans l'intervalle $] -0,9; -0,7[$ une unique solution α .