

<i>Mathématiques</i>		 <i>Devoir de contrôle n°1</i>	
<i>Lycée Ali Bourguiba Bembla</i>			
<i>4^{ème} Tech 2</i>	<i>Mercredi 16-11-2011</i>	<i>Durée : 2 heures</i>	<i>Prof : Chaouch Faouzi</i>

Exercice 1 (6Points)

I) Pour chaque question, une seule réponse est correcte. Laquelle?

1) Si z a pour argument $\frac{2\pi}{3}$ alors un argument de $i\bar{z}^2$ est

- a) $\frac{7\pi}{6}$ b) $\frac{5\pi}{6}$ c) $-\frac{4\pi}{3}$

2) Soit z un nombre complexe de module 2. Alors le conjugué $\bar{z}$ de z est égal à:

- a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ b) $\frac{2}{z}$ c) $\frac{4}{z}$

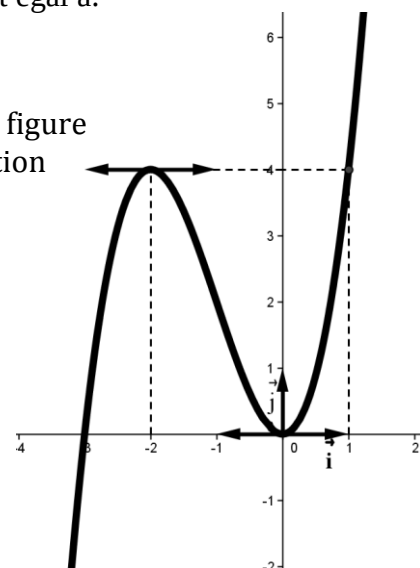
II) Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et deux fois dérivable. Dans la figure ci-dessous, on a représenté la courbe représentative (C) de la fonction dérivée f' de f , dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1) Par une lecture graphique, répondre aux questions suivantes:

- a) Déterminer le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$.
b) Donner le tableau de variation de f' .

2) Répondre par vrai ou faux avec justification.

- a) La courbe de f admet un seul point d'inflexion.
b) Pour tout $x \in [-3; 1]$ on a : $|f(x) - f(1)| \leq 4|x - 1|$
c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$



Exercice 2 (6Points)

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on donne les points A(1) et B(-i).

A tout point M, distinct de B, d'affixe z on associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = \frac{1-z}{1-iz}$.

1) Déterminer l'ensemble des points M pour lesquels $|z'| = 1$.

2) Montrer que pour tout $z \neq -i$, on a : $z' + i = \frac{-1+i}{z+i}$.

3) a) Montrer que $BM \cdot BM' = \sqrt{2}$.

b) En déduire que si M appartient au cercle C de centre B et de rayon 1 alors M' appartient à un cercle C' que l'on déterminera.

5) On pose $z = \cos \theta + i \sin \theta$ avec $\theta \in \left] \frac{3\pi}{2}, 2\pi \right]$.

- a) Ecrire $z+i$ sous forme exponentielle.
b) En déduire la forme exponentielle de $z'+i$.
c) Déterminer θ pour que $|z'+i| = \sqrt{2}$.

Exercice 3(8Points)

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{\pi}{x}\right) & \text{si } x < 0 \\ \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$

1) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^*$.

2)a)Vérifier que pour tout $x < 0$, $-x^2 \leq f(x) \leq x^2$

b)Calculer alors $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$

c) Montrer que f est prolongeable par continuité en 0. (On notera F son prolongement)

d)Vérifier que pour tout $x < 0$; $f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} \times \frac{\sin(\pi x)}{x}$

En deduire que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ (on pourra remarquer que $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$)

e)Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, Interpréter graphiquement le résultat

2) Le tableau ci-dessous donne les variations d'une fonction g continue sur $\mathbb{R}$ vérifiant

$g(0) = 2$ et $g(2) = 0$

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$
$g(x)$		3	0	
	0			$-\infty$

a)Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f \circ g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f \circ g(x)$

b)Calculer $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{g(x)}$,

c) Montrer que $f \circ g$ est continue sur $] -\infty, 2 [$.

d) Montrer que $F \circ g(x) = \frac{1}{2}$ admet au moins une solution dans $[0, 2]$.