

DEVOIR DE CONTRÔLE N 1 - ANNEE SCOLAIRE : 2011-12

SECTION : SCIENCES TECHNIQUES

EPREUVE : MATHEMATIQUES

DUREE : 2h

COEFFICIENT : 3

PROFESSEUR : HATEM EDDHAOUI

“Il est recommandé de soigner la rédaction et la présentation de la copie”

Exercice 1 (3 points)

Répondre par **vrai** ou **faux** en justifiant la réponse :

- 1) Lorsque θ varie dans $[0, \pi]$, le point M d'affixe $i + 2e^{i\theta}$ varie sur un cercle.
- 2) Si z est un nombre complexe tel que $|z| = 2$, alors $|\bar{z} + i\bar{z}| = 2\sqrt{2}$.
- 3) Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$, et si, pour tout $x \leq 2$, $g(x) = 4x - \sqrt{2-x}$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} \text{gof}(x) = +\infty$.

Exercice 2 (6 points)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Soient les points A, B et C d'affixes respectives i , $-3i$ et $-i$.

Pour tout point M du plan d'affixe z ($z \neq -3i$), on associe le point M' d'affixe z' définie par :

$$z' = \frac{iz - 1}{z + 3i}.$$

- 1) Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que z' soit réel.
- 2) Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que $|z'| = 1$.
- 3) a) Vérifier que $(z' - i)(z + 3i) = 2$.

b) En déduire que $AM' \cdot BM = 2$ et que $(\vec{u}, \widehat{AM'}) + (\vec{u}, \widehat{BM}) \equiv 0[2\pi]$.

4) Soit le point E d'affixe $z_E = -3i - 2e^{i\frac{\pi}{4}}$.

a) Calculer BE.

b) Déterminer $(\vec{u}, \widehat{BE})$.



Exercice 3 (6 points)

A/ Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = \begin{cases} x + \sqrt{x^2 - 1} & \text{si } x < -1 \\ 4x^3 + 6x^2 - 1 & \text{si } -1 \leq x \leq 0 \\ \frac{1 - \cos(\pi x)}{x} - 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

1) a) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

b) Montrer que, pour tout $x > 0$, $-1 \leq f(x) \leq \frac{2}{x} - 1$.

c) En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

2) Etudier la continuité de f en (-1) et en 0 .

B/ Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = \sqrt{x^2 - 1} - 4$.

1) Déterminer le domaine de continuité de g .

2) Soit h la restriction de g à l'intervalle $[1, +\infty[$.

a) Montrer que h est strictement croissante sur $[1, +\infty[$.

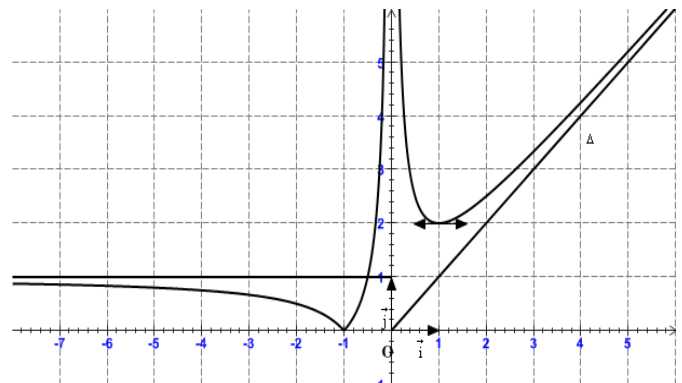
b) Déterminer $h([1, +\infty[)$.

3) Montrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution sur $[4, 5]$.

Exercice 3 (5 points)

Dans le graphique ci-contre, on a représenté la courbe (C_f) d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$. La droite : $\Delta : y = x$ est une asymptote à (C_f) au voisinage de $+\infty$, la droite : $y = 1$ est une asymptote à (C_f) au voisinage de $-\infty$ l'axe des ordonnées est une asymptote à (C_f) à gauche et à droite en 0 .

Utiliser la graphique pour répondre.



1) Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$, $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{f(x)}$ et $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \sin\left(\frac{1}{f(x)}\right)$.

2) Déterminer $f(]-\infty, -1])$, $f([-1, 0[)$ et $f(]0, 1])$.

3) Montrer que la fonction g définie par $g(x) = \sqrt{\frac{1}{f(x)}}$ est continue sur $\mathbb{R}^* \setminus \{-1\}$.

4) La fonction g admet-elle un prolongement par continuité en 0 ?

