

Exercice 1 : (4 points).

Trouver la seule bonne réponse.

1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot \sin \frac{1}{x} =$

a) 0

b) 1

c) $+\infty$

 2) L'image de l'intervalle $[-1, 2]$ par la fonction $f : x \rightarrow x^2$ est

a) $[0, 4]$

b) $[1, 4]$

c) $[-1, 4]$

 3) Soit x un réel. Le nombre complexe z défini par : $z = \frac{x-i}{x+i}$ a pour module :

a) 1

b) $\frac{x-1}{x+1}$

c) $\sqrt{\frac{x^2-1}{x^2+1}}$

 4) Un argument du nombre complexe : $-1 + i\sqrt{3}$ est :

a) $\frac{\pi}{3}$

b) $-\frac{\pi}{3}$

c) $\frac{2\pi}{3}$

Exercice 2 : (4 points)
 Soit la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{\cos \pi x}{1-x} & \text{si } x \in]-\infty, 0[\\ f(x) = x^3 - 12x + 1 & \text{si } x \in [0, 2[\\ f(x) = 1 + x - \sqrt{x^2 - 4} & \text{si } x \in [2, +\infty[\end{cases}$$

1) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

2) a - Montrer que pour tout $x < 0$, on a : $\frac{1}{x-1} \leq f(x) \leq \frac{1}{1-x}$.

b - Déduire $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

3) a - Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in]0, 1[$.

b - Déterminer une valeur approchée de α à 10^{-1} près.

Exercice 3 : (6 points)

Dans le plan complexe, rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$; on donne les points A et B d'affixes respectives $z_A = 1 + i\sqrt{3}$ et $z_B = i - \sqrt{3}$.

 1) a - Ecrire z_A et z_B sous forme exponentielle.

 b - Placer les points A et B dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

c - Montrer que $(z_A)^6 + (z_B)^6 = 0$.

 2) Soit le point C d'affixe $z_C = z_A + z_B$.

 a - Montrer que $(OA) \perp (OB)$.

Exercice 4 : (6 points)

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A(-i) et B(i)

A tout point M du plan distinct de A et d'affixe z , on associe le point M' d'affixe z' défini par : $z' = \frac{z-i}{1-iz}$

1) Déterminer l'ensemble des points M tel que z' soit réel.

2) a - Vérifier que $z' = \frac{i(z-i)}{z+i}$

b - Montrer que $|z'| = \frac{BM}{AM}$.

c - Déterminer l'ensemble des points M tel que $|z'| = 1$.

3) a - Montrer que $|z' - i| \times |z + i| = 2$.

b - En déduire que si M appartient à un cercle ζ de centre A et de rayon 2 alors M' appartient à un cercle ζ' que l'on déterminera le centre et le rayon.

Correction



Correction

Exercice 1 :

1) b 2) a 3) a 4) c

Exercice 2 :

$$1) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1 + x - \sqrt{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{(x - \sqrt{x^2 - 4})(x + \sqrt{x^2 - 4})}{x + \sqrt{x^2 - 4}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{x^2 - x^2 + 4}{x + \sqrt{x^2 - 4}} \\ = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{4}{x + \sqrt{x^2 - 4}} = 1 + 0 = 1.$$

$$2) a - \text{Pour } x < 0, f(x) = \frac{\cos(\pi x)}{1 - x}.$$

On a $\forall x \in \mathbb{R}, -1 \leq \cos(\pi x) \leq 1$ et comme $x < 0$ alors $x - 1 < 0$ donc $\frac{-1}{x-1} \geq \frac{\cos(\pi x)}{x-1} \geq \frac{1}{x-1} \Leftrightarrow \frac{1}{x-1} \leq \frac{\cos(\pi x)}{x-1} \leq \frac{1}{1-x}$

$$b - \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{1-x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x-1} = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\cos(\pi x)}{x-1} = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0.$$

$$3) a - \text{Pour } x \in [0, 1], f(x) = x^3 - 12x + 1.$$

$$f'(x) = 3x^2 - 12 = 3(x^2 - 4)$$

signe de $3x^2 - 12$ sur $\mathbb{R}$:

$$\begin{array}{ccccccc} x & -\infty & & -2 & & 2 & +\infty \\ f'(x) & & + & & - & & + \end{array}$$

Pour $x \in [0, 1], f'(x) < 0 \Rightarrow f$ est strictement décroissante sur $[0, 1]$.

$\left\{ \begin{array}{l} f \text{ est continue et strictement décroissante sur } [0, 1] \\ f(0) \times f(1) < 0 \end{array} \right. \Rightarrow \text{l'équation } f(x) = 0 \text{ admet une unique solution } \alpha \in]0, 1[.$

$$b - f(0) = 1 \text{ et } f(0,1) = -0,19... \Rightarrow 0 < \alpha < 0,1$$

Exercice 3 :

$$1) a - |z_A| = 1 + i\sqrt{3} = \sqrt{1+3} = 2$$

$$\text{Soit } \theta \text{ un argument de } z_A. \begin{cases} \cos \theta = \frac{1}{2} \\ \sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow z_A = 2e^{i\pi/3}$$

$$|z_B| = i - \sqrt{3} = \sqrt{3+1} = 2$$

$$\text{Soit } \theta' \text{ un argument de } z_B. \cos \theta' = -\frac{\sqrt{3}}{2}; \sin \theta' = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta' = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow z_B = 2e^{i5\pi/6}$$

b -

$$c - (z_A)^6 + (z_B)^6 = (2e^{i\pi/3})^6 + (2e^{i5\pi/6})^6 = 2^6 e^{2\pi} + 2^6 e^{i5\pi} = 2^6 - 2^6 = 0$$

$$2) z_c = z_A + z_B.$$

$$a) z_{OA} / z_{OB} = \frac{z_A}{z_B} = \frac{2e^{i\pi/3}}{2e^{i5\pi/6}} = e^{-i\pi/2} = -i \Rightarrow \frac{z_A}{z_B} \text{ est imaginaire pur} \Rightarrow \overline{OA} \perp \overline{OB} \Rightarrow (OA) \perp (OB).$$

$$b) z_c = z_A + z_B \Leftrightarrow \overline{OC} = \overline{OA} + \overline{OB} \Leftrightarrow OACB \text{ est un parallélogramme et comme } (OA) \perp (OB) \text{ et } OA = OB \Rightarrow OACB \text{ est un carré.}$$

$$c) (\vec{u}, \overline{OC}) = (\vec{u}, \overline{OA}) + (\vec{u}, \overline{OB}) + 2k\pi = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} + 2k\pi = \frac{7\pi}{12} + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}.$$

$$|z_c| = \sqrt{2}OA = 2\sqrt{2}$$

$$\text{Donc } z_c = 2\sqrt{2} e^{i7\pi/12}$$

$$d) \begin{cases} z_c = z_A + z_B = (1 - \sqrt{3}) + i(1 + \sqrt{3}) \\ z_c = 2\sqrt{2} e^{i7\pi/12} \end{cases} \Rightarrow \cos \frac{7\pi}{12} = \frac{1 - \sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4} \text{ et } \sin \frac{7\pi}{12} = \frac{1 + \sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$$

Exercice 4 :

$$1) z' \text{ est réel } z' = \bar{z}' \Leftrightarrow \frac{z-i}{1-iz} = \frac{\bar{z}+i}{1+i\bar{z}} \Leftrightarrow (z-i)(1+i\bar{z}) = (1-iz)(\bar{z}+i) \Leftrightarrow z + iz\bar{z} - i + \bar{z} = \bar{z} + i - iz\bar{z} + z \Leftrightarrow 2iz\bar{z} = 2i \Leftrightarrow z\bar{z} = 1.$$

On pose $z = x + iy, (x, y) \in \mathbb{R}^2$ c-à-d $M(x, y)$. $z\bar{z} = 1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1 \Leftrightarrow M \in \text{cercle de centre } o \text{ et de rayon } 1, \text{ mais comme } M \neq A \text{ et } OA = 1 \text{ alors } M \in \text{cercle de centre } o \text{ et de rayon } 1 \text{ privé du point } A.$



$$2) a) z' = \frac{z-i}{1-iz} = \frac{i(z-i)}{i(1-iz)} = \frac{i(z-i)}{z+i}$$

$$b) |z'| = \left| \frac{i(z-i)}{z+i} \right| = \frac{|i(z-i)|}{|z+i|} = \frac{|i| |z-i|}{|z+i|} = \frac{|z-i|}{|z+i|} = \frac{BM}{AM}$$

$$c) |z'| = 1 \Leftrightarrow \frac{BM}{AM} = 1 \Leftrightarrow AM = BM \Leftrightarrow M \in \text{médiane de } [AB].$$

$$3) a) |z' - i| \times |z + i| = \left| \frac{i(z-i)}{z+i} - i \right| \times |z+i| = \left| \frac{iz + 1 - iz + 1}{z+i} \right| \times |z+i| = \frac{2}{|z+i|} \times |z+i| = 2.$$

$$b) |z' - i| \times |z + i| = 2 \Leftrightarrow BM' \times AM = 2$$

Si $M \in \text{cercle } \zeta_{(A,2)}$ alors $AM = 2 \Rightarrow BM' \times 2 = 2 \Leftrightarrow BM' = 1 \Leftrightarrow M' \in \text{cercle } \zeta'_{(B,1)}$