

Exercice N° 1

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$,

On considère les points $A(-2i)$; $B(4-2i)$; $C(4+2i)$ et $D(1)$.

- 1) a) Montrer que ABC est un triangle isocèle et rectangle en B.
b) Ecrire le nombre complexe $(-4-4i)$ sous forme trigonométrique.
- 2) A tout point $M(\neq A)$ d'affixe z on associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = \frac{z-4-2i}{z+2i}$.
a) Déterminer l'ensemble des points M tels que z' soit réel.
b) Déterminer l'ensemble des points M tels que $|z'| = 1$.
- 3) a) Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \{-2i\}$, $z'-1 = \frac{-4-4i}{z+2i}$
b) Montrer que $DM' \cdot AM = 4\sqrt{2}$
c) En déduire, que si M appartient au cercle de centre A et de rayon 2 alors le point M' appartient à un cercle que l'on déterminera. 
- 4) Montrer que $(\vec{u} \wedge \overrightarrow{DM'}) + (\vec{u} \wedge \overrightarrow{AM}) = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Exercice N° 2

Soit f la fonction définie par $f(x) = 1 - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

- 1) a) Montrer que le domaine de définition de f est $D_f =]-1, 1[$
b) Calculer $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$.
c) Montrer que pour tout $x \in]-1, 1[$, $f'(x) = \frac{-1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$.
d) Montrer que f réalise une bijection de $] -1, 1[$ sur $\mathbb{R}$.
- 2) a) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet dans $] -1, 1[$ une solution unique α .
b) Vérifier que $\alpha \in \left] 0, \frac{1}{2} \right[$.
c) Montrer que pour tout $x \in \left[0, \frac{1}{2} \right]$ on a : $|f'(x)| \leq \frac{8\sqrt{3}}{9}$.
d) En déduire que pour tout $x \in \left[0, \frac{1}{2} \right]$ on a : $|f(x) - \alpha| \leq \frac{8\sqrt{3}}{9} |x - \alpha|$.