

Exercice N° 1 :

Soit f la fonction définie par

$$\begin{cases} f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + 1 & \text{si } 0 < x < 3 \\ f(x) = \frac{2x-1}{x-1} & \text{si } x \leq 0 \text{ ou } x \geq 3 \end{cases}$$

- 1) Montrer que f est dérivable en 0. Écrire une équation de la tangente Δ à C_f en $A(0, f(0))$.
- 2) Pour $x \in [-1, 1]$. Étudier le signe de $[f(x) - (1-x)]$ et en déduire la position de C_f par rapport à Δ .
- 3) Étudier la dérivabilité de f en $x_0 = 3$ et indiquer les conséquences graphiques des résultats obtenus.
- 4) Construire les tangentes ou les demi-tangentes à C_f en A et en B $(3, f(3))$

Exercice N° 2 :

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\begin{cases} f(x) = x^2 + \alpha x + \beta & \text{si } x \leq 2 \\ f(x) = 2x - 3 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

- 1) a) Établir une relation en α et β pour que f soit continue en 2.
b) Montrer alors que f est dérivable à droite en 2 et à gauche en 2.
- 2) On désigne par C la courbe représentative de f dans un repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$. Déterminer α et β dans chacun des cas suivants :
 - a) f est dérivable en 2 ; écrire l'équation de la tangente en $A(2, f(2))$ à C et la construire.
 - b) C admet en $A(2, f(2))$ deux demi-tangentes perpendiculaires, écrire leurs équations.

Exercice N° 3 :

Soit f une fonction dérivable en x_0 .

Calculer $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{xf(x_0) - x_0f(x)}{x - x_0}$

Application : calculer $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^3a - a^3x}{x - a}$

Exercice N° 4 :

Soit la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{x^2|x-3|^3}$.

Étudier la dérivabilité de f en 0 et en 3 et indiquer les conséquences graphiques des résultats obtenus.

Exercice N° 5 :

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\begin{cases} f(x) = a - x & \text{si } x \leq -1 \\ f(x) = \sqrt{1-x^2} & \text{si } -1 < x < 1 \\ f(x) = \frac{1}{x} + b & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Trouver les réels a et b pour que f soit continue en -1 et en 1 .

- 1) On prend $a = b = -1$
 - a) Étudier la continuité de f sur $\mathbb{R}$.
 - b) Étudier la dérivabilité de f en -1 et en 1 et interpréter graphiquement les résultats obtenus.
 - c) Montrer que f est dérivable en tout $x_0 \in]-1; 1[$. Préciser $f'(x_0)$.
 - d) Soit $M(x_0; y_0)$ avec $x_0 \in]-1; 1[$. Calculer x_0 pour que la courbe de f admette en M une tangente parallèle à la droite $D: y = -x + 1$
- 3) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - \sqrt{x^2 + 1}]$

Exercice N° 6 :

Soit la fonction f définie sur $[-1; 1]$ par

$$\begin{cases} f(x) = \frac{1 - \sqrt{1-x^2}}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

- 1) Montrer que f est continue sur $[-1; 1]$.
- 2) Montrer que f est dérivable en 0.
- 3) La fonction f est-elle dérivable à gauche en 1 ? à droite en -1 ?

Exercice N° 7 :

Soit f une fonction dérivable en un point x_0 de $\mathbb{R}$.

- 1) Calculer en fonction de x_0 , $f'(x_0)$ et $f(x_0)$;

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{x_0 f(x_0 + h) - (x_0 + h) f(x_0)}{h}$$
- 2) Montrer que la fonction $g: x \mapsto x^3$ est dérivable en tout réel a et calculer $g'(a)$.
- 3) En déduire $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{x_0(h + x_0)^3 - (h + x_0)x^3}{h}$

Exercice N° 8 :

On pose $f(x) = \frac{x|x-2|}{(x-2)(|x|+1)}$ si $x \neq 2$ et $f(2) = \frac{2}{3}$

- 1) Déterminer le domaine de continuité de f .
- 2) Étudier la dérivabilité de f en 2, en 0
- 3) A un point de C_f d'abscisse -1
 - a/ Donner une équation cartésienne de T la tangente à C_f au point A
 - b/ Existe-t-il un point B de C_f où la tangente est parallèle à T ? (B d'abscisse un réel de $]0; 2[$)

Exercice N° 9 :

Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$

- 1) Montrer que $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + nh) - f(x)}{h} = n f'(x)$
- 2) Utiliser le résultat précédent pour démontrer que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{[f(x + 2h)]^2 - [f(x - h)]^2}{h} = 6 f(x) f'(x)$$