

Suites

1 Soient a et b deux réels non nuls avec $b \neq a$.

1°/ Transformer en quotient la somme $\sum_{k=1}^n b^{k-1} \cdot a^{n-k} = a^{n-1} + b \cdot a^{n-2} + b^2 \cdot a^{n-3} + \dots + b^{n-2} \cdot a + b^{n-1}$

2°/ En déduire une factorisation de $x^n + y^n$ lorsque c'est possible.

2 1°/ On remarque que $1 + 2 = 3$; $4 + 5 + 6 = 7 + 8$ et $9 + 10 + 11 + 12 = 13 + 14 + 15$.

Si n est un entier naturel donné, existe-t-il $2n + 1$ entiers naturels consécutifs $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{2n}$ rangés dans l'ordre croissant, vérifiant :

$$a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{2n}$$

2°/ On remarque que $3^2 + 4^2 = 5^2$; $10^2 + 11^2 + 12^2 = 13^2 + 14^2$ et $21^2 + 22^2 + 23^2 + 24^2 = 25^2 + 26^2 + 27^2$

Si n est un entier naturel donné, existe-t-il $2n + 1$ entiers naturels consécutifs $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{2n}$ rangés dans l'ordre croissant, vérifiant :

$$a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 = a_{n+1}^2 + a_{n+2}^2 + \dots + a_{2n}^2$$

3 Un carré parfait est le carré d'un nombre entier. Ainsi : 4, 81 et 529 sont des carrés parfaits car on a $4 = 2^2$, $81 = 9^2$ et $529 = 23^2$.

1°/ Montrer que le produit de quatre entiers naturels consécutifs augmenté de un est un carré parfait.
par exemple : $4 \times 5 \times 6 \times 7 + 1 = 29^2$ et $12 \times 13 \times 14 \times 15 + 1 = 181^2$

2°/ a) Montrer que pour tout entier naturel n non nul $\underbrace{11111111\dots 1}_{n \text{ fois}} = \frac{10^n - 1}{9}$

b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le nombre $\underbrace{1111\dots 1}_{n \text{ fois}} \underbrace{5555\dots 5}_{n \text{ fois}} + 1$ est un carré parfait.

c) Écrire alors le nombre $X = \sqrt{11111111115555555556}$ sans le symbole $\sqrt{}$

4 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx$

1°/ a) Pour quels valeurs de a, b, c , et d a-t-on : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x+1) - f(x) = 6x^2$

b) Calculer alors la somme des n premiers carrés parfaits non nuls.

c) Démontrer par récurrence le résultat obtenu.

2°/ a) Pour quels valeurs de a, b, c , et d a-t-on : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x+1) - f(x) = 4x^3$

b) Calculer alors la somme des n premiers cubes parfaits non nuls.

c) Démontrer par récurrence le résultat obtenu.

3°/ En déduire l'expression, en fonction de n , du terme général de la (U_n) définie par $\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} - U_n = n^3 - n^2 \end{cases}$

N.B.: On donne $(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

5 1°/ Quel est le chiffre des unités de $1 + 9^{2000}$?

2°/ Quel est le dernier chiffre de l'écriture décimale de $\frac{1}{5^{2002}}$?

6 1°/ Résoudre dans $\mathbb{N}$ (E) : $2^{1994} + 4^{997} + 8^{665} = 16^n$; (E₁) : $2^n(6-n) = 8n$

2°/ Résoudre dans $\mathbb{N}^*$: $\sum_{k=1}^n 2^{2k+1} = \frac{8}{3}(4^a - 1)$ avec $a = 2n^2 - n$