

Suites réellesEXERCICE N°1

Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_n = \frac{3n+2}{n+4}$

1-Calculer $u_0, u_1, u_5, u_{21}, u_{98}$

2-Montrer que pour tout entier naturel n on a : $\frac{1}{2} \leq u_n \leq 3$

EXERCICE N°2

On considère la suite (u_n) définie par :
$$\begin{cases} u_0=0 \text{ et } u_1=1 \\ u_{n+1}=2u_{n+1}+u_n \end{cases}$$

Calculer u_2 et u_7

EXERCICE N°3

On considère la suite définie par :
$$\begin{cases} u_0=1 \\ u_{n+1}=\frac{u_n}{1+u_n} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1-Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n on a : $0 < u_n \leq 1$

2-Montrer que pour tout entier naturel n on a : $u_{n+1} \leq u_n$

3-On pose $V_n = \frac{1}{u_n}$

a-Calculer V_0 et V_1

b-Montrer que la suite V est arithmétique dont-on précisera son premier terme et sa raison

c-Donner V_n en fonction de n puis u_n en fonction de n

d-Donner la valeur de $S = \sum_{k=1}^{10} v_k$

EXERCICE N°4

On considère la suite (u_n) définie par :
$$\begin{cases} u_0=1 \\ u_{n+1}=\sqrt{u_n^2+2} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1-Montrer que pour tout entier n on a : $u_n > 0$

2-Montrer que pour tout entier n on a : $u_{n+1} > u_n$

3-On pose $V_n = u_n^2$

a-Montrer que V_n est une suite arithmétique

b-Calculer V_n puis u_n en fonction de n

c-Donner en fonction de n la valeur de $S = \sum_{k=1}^n v_k$

EXERCICE N°5

Soit (u_n) une suite arithmétique de premier terme U_0 et de raison r

1-On donne $U_5=11$ et $U_8=41$ calculer U_0 et r

2-Sachant que $r=-3, U_1=6$ et $\sum_{k=0}^n u_k = -90$ calculer n

EXERCICE N°6

1-Soit U_n une suite arithmétique de raison r

a-Calculer U_3, U_7 et U_{80} connaissant $U_{50}=20$ et $r=-2$

b-Calculer U_{100} et r connaissant $S=U_0+U_1+\dots+U_{100}=2513$ et $U_0=9$

Suites réelles

2-On désigne par V une suite géométrique de raison q

a-Calculer V_3, V_6 et V_n Connaissant $V_8=768$ et $q=2$

b-Calculer $S = V_0 + V_1 + \dots + V_n$ connaissant $V_0=2$ et $q=3$

EXERCICE N°7

1-Soit $a \in \mathbb{R} - \{0, \frac{1}{2}\}$, on pose $A = \frac{2a^2 - a + 1}{2a^2 - a}$; $B = \frac{2a}{2a-1}$ et $C = \frac{a+1}{a}$. Montrer que A, B et C sont trois termes

consécutifs d'une suite arithmétique

2-Déterminer le réel x pour que $(x+1), (x+7)$ et $(x+31)$ soit dans cette ordre trois termes consécutifs d'une suite géométrique

EXERCICE N°8

Soit U la suite définie par :
$$\begin{cases} u_0=3 \\ u_{n+1}=\frac{1}{3}u_n+4 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1-Calculer U_1, U_2 et U_3 ; La suite U est elle particulière ?

2-Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n on a : $0 \leq U_n \leq 6$

3-On considère la suite V définie sur $\mathbb{N}$ par $V_n = U_n + a$

a-Déterminer a pour que V soit une suite géométrique

b-Exprimer V_n en fonction de n puis U_n en fonction de n

c-Retrouver le résultat du 2-

4-Calculer

a- $V_0 + V_1 + \dots + V_n$ puis $U_0 + U_1 + \dots + U_n$

b- $V_2 + V_3 + \dots + V_{n+5}$ puis $U_2 + U_3 + \dots + U_{n+5}$

EXERCICE N°9

Soient U et V les suites réelles définies sur $\mathbb{N}$ par :

$$U_n = 2n - 3 + \pi^n$$

$$V_n = 2n - 3 - \pi^n$$

1-Montrer que U et V ne sont ni arithmétiques, ni géométrique

2-Soit W la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $W_n = U_n + V_n$

Montrer que W est une suite arithmétique et calculer $S = \sum_{k=0}^n W_k$

3-Soit Z la suite définie par $Z_n = U_n - V_n$

a-Montrer que Z est une suite géométrique et calculer $S' = \sum_{k=0}^n Z_k$

b-Déduire les valeurs de $S_1 = \sum_{k=0}^n u_k$ et $S_2 = \sum_{k=0}^n v_k$

EXERCICE N°10

On considère la suite U définie sur $\mathbb{N}$ par $U_n = \frac{n(n+2)}{(n+1)^2}$

1-Montrer que pour tout entier naturel n on a : $0 \leq U_n \leq 1$

2-Calculer en fonction de n, $U_{n+1} - U_n$

3-On pose pour $n > 0$, $V_n = U_1 + U_2 + \dots + U_n$

a-Calculer V_1, V_2 et V_3

b- Montrer que $V_n = \frac{(n+2)}{2(n+1)}$ pour tout n non nul

EXERCICE N°11

Suites réelles

I- Soit U une suite géométrique de premier terme U_1 et de raison q tel que
$$\begin{cases} q < -1 \\ u_1 + 2u_2 + u_3 = 8 \\ u_1 u_2 u_3 = -216 \end{cases}$$

1- Calculer U_1 et q

2- Montrer que $U_n = 2 \cdot (-3)^{n-1}$

3- Déterminer n pour que $\sum_{k=1}^n u_k = 122$

II- Soit V la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par :
$$\begin{cases} v_1 = 2 \\ v_{n+1} = \frac{3}{2}v_n + u_n, n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

1- Calculer V_2 et V_3

2- On pose pour tout non nul $W_n = \frac{v_n}{u_n} + \frac{2}{9}$

a- Montrer que W est une suite géométrique déterminer sa raison

b- Exprimer W_n en fonction de n

EXERCICE N°12

On considère la suite U définie par :
$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_n = u_{n-1} + n(-1)^{n-1}, n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

1- Calculer U_1, U_2 et U_3

2- Montrer que $U_{n+2} = U_n - (-1)^n$

3- Considérons les suites suivantes $V_p = U_{2p-1}$ et $W_p = U_{2p}$, pour tout p non nul

a- Calculer V_1, V_2, V_3, W_1, W_2 et W_3

b- Montrer que $W_{p+1} - W_p = -1$

c- Montrer que $V_p + W_p$ est une suite constante, en déduire que V est une suite arithmétique

EXERCICE N°13

Soit la suite u_n définie par $u_0 \in [0, 2]$ et $u_{n+1} = \frac{2+8u_n}{7+u_n}$

1- Montrer que si $u_0 = 2$ alors la suite u est constante

2- On suppose que $u_0 \in [0, 2[$

a- Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $u_n \in [0, 2[$

b- Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $u_{n+1} > u_n$

3- Soit v la suite définie par : $v_n = \frac{-2+u_n}{1+u_n}$

a- Montrer que v est une suite géométrique

b- Exprimer v_n en fonction de n et u_0 , en déduire l'expression de u_n en fonction de n et u_0

c- Donner $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$, calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

EXERCICE N°14

On définit les deux suites u et v par
$$\begin{cases} u_0 = 1, v_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3} \text{ et } v_{n+1} = \frac{u_n + 3v_n}{6} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1- Calculer u_1, u_2, v_1 et v_2 , en déduire que chacune des deux suites n'est arithmétique ni géométrique

2- Montrer par récurrence que $u_n \neq v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

3- On désigne par w et T les suites définies par $w_n = v_n - u_n$ et $T_n = u_n + 4v_n$

a- Montrer que w est une suite géométrique préciser sa limite éventuelle et exprimer son terme générale en fonction de n

Montrer que T est une suite constante et la définir

4- Utiliser ce qui précède pour exprimer u_n et v_n en fonction de n

Suites réelles

5- Exprimer $S = \sum_{k=0}^{n-1} u_k$ en fonction de n

EXERCICE N°15

Soit la suite U définie sur $\mathbb{N}$ par : $U_0=2$ et $U_{n+1}=3U_n-(n^2+n)$ pour tout n dans $\mathbb{N}$

1- Calculer U_1 et U_2 . En déduire que U est ni arithmétique ni géométrique

2- Soit la suite V définie par : $V_n = U_n - \frac{1}{2}n^2 - n - \frac{3}{4}$

a- Montrer que la suite V est géométrique et préciser sa raison puis $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n$

b- Exprimer V_n puis U_n en fonction de n

3- a- Calculer la somme $S = \sum_{k=0}^n V_k$ en fonction de n

b- Montrer par récurrence que pour tout n entier naturel on a : $\sum_{k=0}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

c- En déduire la somme $S' = \sum_{k=0}^n u_k$ en fonction de n

EXERCICE N°16

Pour n dans $\mathbb{N}$ on considère la suite U définie par : $\begin{cases} u_0 \text{ et } u_1 \text{ sont deux réels donnés non nul} \\ \text{pour } n \in \mathbb{N}^*; u_{n+1} = u_n + 6u_{n-1} \end{cases}$

On considère la suite V_n définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $V_n = U_n + 2U_{n-1}$

1- Montrer que la suite V est géométrique de raison 3. Donner V_n à l'aide de n et V_1

2- a- Montre que $\frac{u_1}{3} = \frac{V_1}{3} + (-\frac{2}{3})u_0$ et que $\frac{u_2}{3^2} = \frac{V_1}{3} [1 + (-\frac{2}{3})^1] + (-\frac{2}{3})^2 u_0$

b- Montrer alors par récurrence que pour tout n non nul on a : 0

$$\frac{u_n}{3^n} = \frac{V_1}{3} [1 + (-\frac{2}{3})^1 + (-\frac{2}{3})^2 + \dots + (-\frac{2}{3})^{n-1}] + (-\frac{2}{3})^n u_0$$

c- En déduire une simple expression de U_n en fonction de n, U_0 et U_1

