

Exercice N°1 :

(I) Soit la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $\sum_{k=1}^n U_k = \frac{-2n-4}{2^n} + 4$

- 1) Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $U_n = \frac{n}{2^{n-1}}$
- 2) Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $U_n \leq 1$.

(II) Soit θ un réel de l'intervalle $]\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}[$. On définit les suites (V_n) et (W_n) sur $\mathbb{N}^*$ par $V_1 = 1$ et

$$V_{n+1} = \frac{n+1}{n} V_n \cos \theta \quad \text{et} \quad W_n = \frac{V_n}{n}.$$

- 1) a/ Montrer que (W_n) est une suite géométrique de raison $\cos \theta$.
- b/ Déterminer les expressions de W_n et de V_n en fonction de $\cos \theta$ et de n - Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} W_n$.
- c/ Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$ $V_n \leq U_n$.
- 2) On pose pour $n \in \mathbb{N}^*$: $S_n = 1 + 2\cos \theta + 3\cos^2 \theta + \dots + n\cos^{n-1} \theta$.

a/ Calculer $S_n (1 - \cos \theta)$ et en déduire que $S_n = \frac{1 - \cos^n \theta}{(1 - \cos \theta)^2} - \frac{\cos \theta}{1 - \cos \theta} \cdot V_n$

b/ Déterminer alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n}{n}$.

Exercice N°2 :

1) Montrer que $\cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$.

2) Soit la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $U_0 = 1$ et $U_{n+1} = \sqrt{2 + U_n}$

a/ Calculer U_1 et U_2 . Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 < U_n < 2$

b/ En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} > U_n$

3) Soit $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}$ $U_n = 2 \cos V_n$, $V_n \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

a/ Calculer V_0 , V_1 et V_2 et vérifier que V_0 , V_1 et V_2 sont en progression géométrique.

b/ Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ $\cos(V_{n+1}) = \cos\left(\frac{1}{2} V_n\right)$. En déduire la nature de la suite (V_n)

c/ Exprimer V_n puis U_n en fonction de n . En déduire la valeur de $\cos \frac{\pi}{24}$

d/ On pose $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{3}{2\pi} V_n - \frac{1}{n} \right)$. Exprimer S_n en fonction de n . Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$

Exercice N°3 :

1) Montrer que $\sin 2x \cdot \sin 3x - \sin x \cdot \sin 3x - \sin x \cdot \sin 2x = 2 \sin x \cdot \sin \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{7x}{2}$

En déduire la valeur de $\sin \frac{2\pi}{7} \cdot \sin \frac{4\pi}{7} - \sin \frac{6\pi}{7} \cdot \sin \frac{3\pi}{7} - \sin \frac{\pi}{7} \cdot \sin \frac{2\pi}{7}$

2) Montrer que $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$. En déduire que $\left(\cos \frac{x}{3}\right)^3 = \frac{1}{4} \cos x + \frac{3}{4} \cos \frac{x}{3}$

3) On donne $S_4 = \cos^3 \frac{x}{3} - 3\cos^3 \frac{x}{3^2} + 3^2 \cos^3 \frac{x}{3^3} - 3^3 \cos^3 \frac{x}{3^4}$. Montrer que $S_4 = \frac{1}{4} \cos x - \frac{3^4}{4} \cos \frac{x}{3^4}$

4) On pose $S_n = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} 3^{k-1} \cos^3 \left(\frac{x}{3^k} \right)$. Montrer par récurrence que $S_n = \frac{1}{4} \cos x + (-1)^{n-1} \frac{3^n}{4} \cos \frac{x}{3^n}$