

Exercice N° 1 :

1) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $1 \times 3 + 2 \times 4 + \dots + n \times (n+2) = \frac{1}{6} n (n+1) (2n+7)$

Exercice N° 2 :

- 1) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $3 \times 5^{2n-1} + 2^{3n-2}$ est divisible par 17.
 2) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $3^{2n+2} - 2^{n+1}$ est divisible par 7

Exercice N° 3 :

1) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\sum_{k=1}^n \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{n+2}{2^n}$ et que $\sum_{k=1}^n k 2^{k-1} = 2^n (n-1) + 1$

Exercice N° 4 :

Montrer que si (U_n) est une suite arithmétique non nulle alors la suite (V_n) telle que $V_n = q^{U_n}$ est géométrique.

Exercice N° 5 :

Soit la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $\sum_{k=1}^n U_k = \frac{-2n-4}{2^n} + 4$

- 1) Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $U_n = \frac{n}{2^{n-1}}$ 2) Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $U_n \leq 1$.

Exercice N° 6 :

Soit la suite $U = (U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $U_0 \in]-1; 0[$ et la relation de récurrence : $U_{n+1} = \frac{2U_n}{\sqrt{3+U_n^2}}$

Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $-1 < U_n < 0$

Exercice N° 7 :

Soit la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $U_0 = 1$; $U_{n+1} = U_n + \frac{1+U_n}{1+2U_n}$

- 1) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$; $U_n > 0$. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $U_{n+1} > U_n$
 2) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$; $U_{n+1} > U_n + \frac{1}{2}$. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $U_n > 1 + \frac{n}{2}$.

Exercice N° 8 :

Soit la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $U_0 = 9$; et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $U_{n+1} = \frac{U_n^2 + 9}{2U_n}$

1) Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $U_n > 3$

2) On pose $V_n = \frac{U_n - 3}{U_n + 3}$

a/ Établir que $U_{n+1} - 3 = \frac{(U_n - 3)^2}{2U_n}$ et $U_{n+1} + 3 = \frac{(U_n + 3)^2}{2U_n}$

b/ En déduire V_{n+1} en fonction de V_n

c/ Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $V_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}$

d/ En déduire U_n

Exercice N° 9 :

(U_n) est une suite arithmétique de raison 2 et telle que $U_3 = 5$

1) Exprimer U_n en fonction de n

2) On pose $S_n = \sum_{k=1}^n U_k$. Exprimer S_n en fonction de n .

3) Soit $V_n = \frac{1}{U_n}$. Montrer que : $V_{k+1} - V_k = \frac{-2}{4k^2 - 1}$ et en déduire en fonction de n la somme $S = \sum_{k=0}^n \frac{1}{4k^2 - 1}$.