

Exercice N° 1 :

$$U_0 = 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N} \quad U_{n+1} = \sqrt{a + U_n^2}$$

1/ Calculer U_1 , U_2 , U_3 puis calculer U_n en fonction de n et de a .

2/ Calculer $S_n = U_1^2 + U_2^2 + \dots + U_n^2$ en fonction de n et a .

Exercice N° 2 :

$$\text{Soit la suite réelle } (U_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ définie par } \begin{cases} U_0 \in \mathbb{R}_+^* \\ U_{n+1} = \frac{U_n}{3 - 2U_n} \quad (n \in \mathbb{N}) \end{cases}$$

1/ Montrer que (U) est constante pour une valeur de U_0 que l'on déterminera.

2/ On pose $V_n = \frac{U_n + a}{U_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Déterminer le réel a non nul de telle sorte que la suite $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ soit une suite géométrique. Déterminer la raison q .

Exercice N° 3 :

$$\text{Soit } (U_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ la suite réelle définie sur } \mathbb{N} \text{ par } \begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = \frac{5U_n + 6}{U_n + 4} \quad (n \in \mathbb{N}) \end{cases}$$

1/ Montrer qu'il existe deux constantes a et b tels que

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N} \quad U_{n+1} = a + \frac{b}{U_n + 4}$$

2/ Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $-2 < U_n < 3$

3/ En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $U_{n+1} - U_n > 0$

4/ Soit $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite réelle définie sur $\mathbb{N}$ par $V_n = \frac{U_n - 3}{U_n + 2}$

a) Montrer que (V) est une suite géométrique b) Déterminer la limite de V_n en $+\infty$

c) Exprimer V_n en fonction de n .

d) En déduire U_n en fonction de n .

e) Calculer $\sum_{k=0}^n V_{2k}$

f) Montrer que : pour tout $n \in \mathbb{N}$ $|U_n - 3| < 5 |V_n|$

Exercice N° 4 :

On donne la suite (U) définie par : $U_0 = U_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ $U_{n+2} = -\frac{2}{3}U_n + \frac{\alpha}{9}U_n$

1/ On suppose que $\alpha = -1$

a) Démontrer que la suite (V) définie par $V_n = U_{n+1} + \frac{1}{3}U_n$, est une suite géométrique.

Calculer V_n en fonction de n .

b) Démontrer que la suite $W_n = (-3)^n U_n$ est une suite arithmétique de raison -4 . Déduire que $U_n = \left(\frac{-1}{3}\right)^n (1 - 4n)$

2/ On suppose que $\alpha = \frac{-3}{4}$

a) Montrer qu'il existe deux valeurs du réel α pour lesquelles la suite (t) telle que $t_n = U_{n+1} + \alpha U_n$ est une suite géométrique ; préciser pour chaque valeur de α la raison de la suite.

b) Montrer alors que $U_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n \left[7 - 9\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right]$; calculer la somme $S = \sum_{k=0}^n U_{2k}$

Exercice N° 5 :

On considère la suite (W) définie par $W_1 = -2$; $W_2 = 5$ et $W_n = \frac{1}{6}(W_{n-1} + W_{n-2})$ ($n \geq 3$)

On considère la suite (U) définie par $U_n = 2W_n - W_{n-1}$ pour $n \geq 2$

1/ Montrer que la suite (U) est géométrique. Exprimer U_n en fonction de n pour $n \geq 2$

2/ On considère la suite (V) définie par $V_{n+1} = W_{n+1} + \frac{1}{3}W_n$ pour $n \geq 1$; montrer que (V) est une suite géométrique. Exprimer V_n en fonction de n ($n \geq 2$)

3/ a) Déterminer l'expression de W_n en fonction de n pour $n \geq 1$

b) Déterminer $\lim W_n$ quand $n \rightarrow +\infty$

c) Calculer $\sum_{k=1}^n W_k$ en fonction de n .