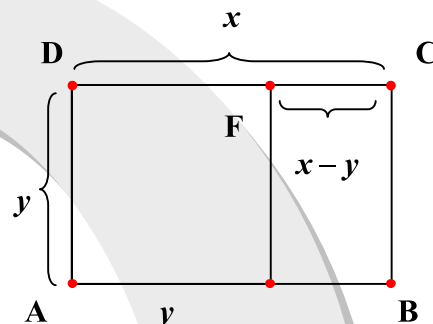


Le nombre d'Or

1 Géométriquement, le nombre d'or, noté φ (phi), est défini comme le quotient $\varphi = \frac{x}{y}$ des longueurs des côtés d'un rectangle ABCD tel qu'en enlevant le carré ADFE, le rectangle EBCF reste semblable à ABCD, c'est-à-dire $\frac{x}{y} = \frac{y}{x-y}$ (x désigne le grand côté et y le petit)



- 1°) Calculez φ
- 2°) Montrez que le nombre d'or est le seul nombre réel positif qui, augmenté de un, est égal à son carré.
- 3°) Montrez que le nombre d'or est le seul nombre réel positif qui est égal à son inverse augmenté de un.

2 Fibonacci, un mathématicien italien du moyen âge, a découvert une suite qui porte son nom. Cette suite se construit d'une façon très simple : chacun de ces termes est égal à la somme des deux précédents, ce qui donne : 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233 etc. Or le nombre d'or est intimement lié à la suite de Fibonacci. Démonstration :

- 1°) La suite de Fibonacci est la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $U_0 = 1, U_1 = 1$ et $U_{n+1} = U_n + U_{n-1}$ pour $n \geq 1$
 - a/ On sait que $\varphi^2 = \varphi + 1$ (Résultat de l'exercice 1). Calculez $\varphi^3, \varphi^4, \varphi^5$ et φ^6 . Remarquez-vous que l'on a $\varphi^{n+1} = \varphi U_n + U_{n-1}$? Démontrez par récurrence que cette relation est vraie pour $n \geq 1$.
 - b/ On appelle S_n la somme des $(n+1)$ premiers termes de la suite (U_n) . Pour des valeurs impaires de l'entier n , utilisez la relation $U_{n+1} = U_n + U_{n-1}$ pour montrer que $S_n = U_2 + U_4 + U_6 + U_8 + \dots + U_{n+1}$ puis que $S_n = U_0 + U_3 + U_5 + U_7 + \dots + 2U_n$. Ensuite, à partir des deux relations établissez que $S_n = U_{n+2} - 1$. Démontrez ce résultat par récurrence.
 - c/ Démontrez de deux manières que $\sum_{k=1}^{n+1} \varphi^k = \varphi^{n+3} - \varphi^2$ (Utilisez les résultats des questions a/ et b/)
- 2°) Dans cette question on va traiter les puissances négatives de φ , c'est-à-dire la suite $\varphi^{-1}, \varphi^{-2}, \varphi^{-3}, \dots, \varphi^{-n}$ où n est un entier naturel, et on va chercher les liens qui existent entre cette suite et celle de Fibonacci.

On va donc considérer la suite (T_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $T_n = \frac{1}{\varphi^n}$

- a/ On sait que $T_1 = \varphi^{-1} = \varphi - 1$ (Résultat de l'exercice 1). Après avoir vérifié que $T_n = (\varphi - 1)^n$ et que $T_{n+1} = (\varphi - 1) T_n$ ($\forall n \in \mathbb{N}^*$), écrivez T_2, T_3, T_4, T_5 et T_6 sous la forme $a_i \varphi + b_i$ ($i \in \mathbb{N} / 2 \leq i \leq 6$). Que remarquez-vous à propos des suites (a_i) et (b_i) . Déterminez alors a_n et b_n pour que l'on ait $\forall n \in \mathbb{N}^* : T_n = \varphi \cdot a_n + b_n$ (Utilisez le raisonnement par récurrence)
- b/ Montrez sans utiliser le raisonnement par récurrence que $T_n \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$. Déduisez que $\sum_{k=0}^n T_k \leq 3 - \frac{1}{3^n}$
- 3°) On se propose maintenant de calculer U_n en fonction de n . Pour cela, on définit une suite (V_n) telle que $V_n = U_{n+1} + \alpha U_n$ pour tout entier naturel non nul n .
 - a/ Montrez qu'il existe deux valeurs du réel α pour lesquelles la suite (V_n) est géométrique, et précisez pour chaque valeur de α la raison de la suite.
 - b/ Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $X_n = U_{n+1} + \alpha' U_n$ et $Y_n = U_{n+1} + \alpha'' U_n$ où α' et α'' sont les deux valeurs de α trouvées dans 3°) a/. Exprimez X_n et Y_n en fonction de n , déduisez U_n en fonction de n .

4°) Considérons la suite (W_n) où chaque terme est obtenu en ajoutant 1 à l'inverse du terme précédent, le premier terme de cette suite étant $W_1 = 1$

a/ Sans faire aucun calcul, comment pouvez-vous écrire W_2, W_3, W_4 , et W_5 ?

b/ Montrez que pour un entier non nul n on a $W_n = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\ddots 1 + \frac{1}{1}}}} \}$ $(n-1)$ traits de fractions

c/ Vérifiez que pour $n \in \mathbb{N}$, $W_n = \frac{U_n}{U_{n-1}}$. Déduisez une expression de W_n en fonction de n .

d/ Utilisez les résultats précédents et montrez que $\varphi = \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\ddots 1 + \frac{1}{1}}}} \}$ n traits de fractions

5°) Pour terminer, nous allons considérer la suite (A_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $A_1 = 1$ et $A_{n+1} = \sqrt{1 + A_n}$

a/ Trouvez le plus grand réel p et le plus petit réel k qui vérifient : $\forall n \in \mathbb{N}^*, p \leq A_n \leq k$

b/ Démontrez que $\forall n \in \mathbb{N}^* : A_{n+1} \geq A_n$. Pour quelle valeur de A_1 la suite (A_n) aurait-elle été constante ?

c/ Donnez une écriture de A_1, A_2, A_3 et A_4

d/ Montrez que $\forall n \in \mathbb{N}^*, A_n = \underbrace{\sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots + \sqrt{1 + 1}}}}}_{n \text{ fois le symbole } \sqrt{}}$

e/ On pose $\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} A_n$. En justifiant $\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} A_{n+1}$, montrez que $\varphi = \lim_{n \rightarrow +\infty} \underbrace{\sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots + \sqrt{1 + 1}}}}}_{n \text{ fois le symbole } \sqrt{}}$

(vérifier ce résultat en utilisant une calculatrice)

3 On considère le polynôme $P(x) = 8x^3 + 8x^2 - 1$

1°) Calculez $P\left(-\frac{1}{2}\right)$ et déduisez une factorisation de $P(x)$

2°) a/ Après avoir vérifié que $\sin \frac{\pi}{10} = \cos \frac{4\pi}{10}$, montrez que $\sin \frac{\pi}{10} = \frac{\varphi - 1}{2} = \frac{1}{2\varphi}$

b/ Calculez alors les valeurs de $\cotg \frac{\pi}{10}$, $\cos \frac{\pi}{10}$, $\cos \frac{\pi}{5}$, $\tg \frac{\pi}{5}$, $\sin \frac{\pi}{5}$, $\cos \frac{\pi}{20}$, $\sin \frac{\pi}{20}$

c/ Déduisez l'ensemble de solutions de chacune des équations suivantes :

$$2\sin \pi x + 1 = 2\cos 2\pi x \quad ; \quad \sin \pi x \cdot \cos 2\pi x = \frac{1}{4}$$

3°) a/ En utilisant ce qui précède, construisez un pentagone régulier inscrit dans un cercle de rayon $r = 1$.

b/ Quelle est la longueur d'un côté de ce pentagone ?

4°) a/ Montrez qu'il n'existe qu'un seul réel θ de l'intervalle $[0; \frac{\pi}{2}[$ qui vérifie $\cos \theta = \tg \theta$

b/ Montrer que $\cos \theta = \sqrt{\sin \theta}$, en déduire que $\tg 2\theta = \frac{2}{\tg^3 \theta}$

c/ Établissez la relation $\tg 2\theta = 2(\tg \theta + \cotg \theta)$ puis utilisez-la pour montrer que $\frac{1}{\tg^6 \theta} = \varphi^3$