

### Exercice N° 1 :

Soit un triangle ABC du plan P , A' , B' , C' les images des points A , B et C par les projections orthogonales sur (BC), (AC) et (AB). H est l'orthocentre du triangle ABC.

- 1) Comparer les réels  $\overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{HB}$  ;  $\overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{HC}$  et  $\overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{HC}$
- 2) Montrer les égalités suivantes :

$$\overrightarrow{HA} \times \overrightarrow{HA'} = \overrightarrow{HB} \times \overrightarrow{HB'} = \overrightarrow{HC} \times \overrightarrow{HC'}$$

### Exercice N° 2 :

Soit ABCD un parallélogramme et M un point du plan.

- 1) Montrer l'égalité  $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AC}$
- 2) Soient B' , C' et D' les images respectives de M par les projections orthogonales sur (AB), (AC) et (AD). Montrer l'égalité  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AD'} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC'}$
- 3) Déterminer et construire l'ensemble des points M de P tels que  $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$

### Exercice N° 3 :

Soit  $R = (O, \vec{i}, \vec{j})$  un RON du plan P. On considère les vecteurs  $\vec{u} = (\sin \alpha) \vec{i} + (1 + \cos \alpha) \vec{j}$  et

$$\vec{v} = (1 + \cos \alpha) \vec{i} - (\sin \alpha) \vec{j} \text{ où } \alpha \in [0 ; 2\pi]$$

- 1) Calculer  $\|\vec{u}\|$  et  $\|\vec{v}\|$  en fonction de  $\alpha$
- 2)  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont-ils orthogonaux ?
- 3) Déterminer les réels  $\alpha$  pour que  $(\vec{u}, \vec{v})$  soit une base orthonormée de P. Écrire les coordonnées des vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  correspondants.

### Exercice N° 4 :

Soient A, B et C trois points non alignés. Quel est l'ensemble des points M tels que :

- 1)  $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$
- 2)  $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} = 0$
- 3)  $MA^2 - MB^2 = 4a^2$  tel que  $AB = 2a$

### Exercice N° 5 :

Soient A et B deux points donnés du plan P et I le point défini par  $\overrightarrow{AI} + 2\overrightarrow{BI} = \vec{0}$  ; et C un point de la perpendiculaire à la droite (AB) en I. On donne  $AB = 3$  et  $IC = 2$ .

- 1) Construire les points A, B, I et C
- 2) Montrer que  $CA^2 + 2CB^2 = 18$
- 3) Montrer que  $\forall M \in P$

$$MA^2 + 2MB^2 - 3MC^2 = 18 + 6\overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{CI}$$

- 4) On considère  $\Delta$  l'ensemble des points M de P tels que  $MA^2 + 2MB^2 - 3MC^2 = 42$ 
  - a/ Montrer que  $\Delta$  est une droite dont on précisera la direction.
  - b/ Montrer que  $\Delta$  est tangente au cercle (C) de centre C et passant par I.

### Exercice N° 6 :

Soit P un plan ; A et B deux points distincts de ce plan.

- 1) Construire le point G tel que  $\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GB} = \vec{0}$  et exprimer pour tout M de P le vecteur  $\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB}$  à l'aide de  $\overrightarrow{MG}$
- 2) Quel est l'ensemble  $(\Delta)$  des points M du plan tels que :  $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{BA}$
- 3) On suppose que  $AB = 3x$  où  $x > 0$ 
  - a/ Exprimer  $MA^2 + 2MB^2$  à l'aide de  $MG^2$  et  $x$
  - b/ En déduire suivant les réels k l'ensemble  $(C_k)$  des point M de P tels que  $MA^2 + 2MB^2 = k$

### Exercice N° 7 :

Dans le plan P on considère un triangle équilatéral ABC de côté de longueur  $a > 0$  ;  $I = B * C$

- 1) Soit G le point défini par  $2\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$   
Montrer que  $G = A * I$
- 2) Calculer en fonction de a ,  $GA^2$  ,  $GB^2$  et  $GC^2$
- 3) Déterminer l'ensemble (C) des point M de P tels que  $2MA^2 + MB^2 + MC^2 = 2a^2$
- 4) Soit  $J = A * G$ 
  - a/ Montrer que  $\forall M \in P$  ,  
 $2MA^2 + \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} = 4(MJ^2 - JA^2)$
  - b/ Déterminer et construire l'ensemble E défini par  
 $E = \left\{ M \in P / 2MA^2 + \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} = 3a^2 \right\}$

### Exercice N° 8 :

Soit (C) le cercle circonscrit à un triangle ABC, D le point diamétralement opposé à A et I le milieu du segment [BC].

- 1) Montrer que  $2\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ .
- 2) Montrer que  $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} = AB^2$  et que  $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AC} = AC^2$
- 3) En déduire que  $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AI} = \frac{AB^2 + AC^2}{2} = AI^2 + BI^2$
- 4) On suppose dans cette question seulement que  
 $AB = 5x$  ;  $AC = 2\sqrt{3}x$  où  $x > 0$  et  $\widehat{BAC} = 30^\circ$   
Calculer BC, calculer ensuite la longueur de la médiane AI.

### Exercice N° 9 :

Soit ABC un triangle rectangle en A tel que  $AB = 2a\sqrt{3}$  ;  $AC = 2a$  ;  $a > 0$

- 1) a/ Montrer que  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = -12a^2$   
b/ Déduire  $\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC})$  puis déterminer une détermination dans l'intervalle  $[\pi, 2\pi]$  de l'angle  $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})$
- 2) Soit  $(\Gamma)$  le cercle de diamètre [AC], la droite (BC) coupe  $(\Gamma)$  en D. Montrer que  $\overrightarrow{BD} \times \overrightarrow{BC} = BA^2$
- 3) Soit M un point variable sur le cercle  $(\Gamma)$  et N un point de P tel que  $2\overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AB} = \vec{0}$ . Déterminer et construire l'ensemble  $(\Gamma')$  des points N quand M décrit le cercle  $(\Gamma)$