

TrigonométrieExercice N°1

Pour $x \in \mathbb{R}$, calculer les expressions suivantes en fonction de $\cos x$ et $\sin x$

- 1- $\sin(5\pi - x) + \cos(\frac{5\pi}{2} + x) + \sin(\frac{5\pi}{2} - x)$
- 2- $\sin(x + \frac{3\pi}{2}) + \sin(3\pi - x) + \cos(3\pi - x) + \cos(x + \frac{3\pi}{2})$

Exercice N°2

- 1- Calculer $\cos x$ et $\sin x$ sachant que $\tan x = 2$ et $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$
- 2- Calculer $\cos x$ et $\tan x$ sachant que $\sin x = \frac{-1}{4}$ et $\pi \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$

Exercice N°3

Démontrer les résultats suivants

- 1- $(\sin x + \cos x)^2 = 1 + 2\cos x \sin x$
- 2- $(\sin x - \cos x)^2 = 1 - 2\cos x \sin x$
- 3- $\cos^4 x + \sin^4 x + 2\sin^2 x \cos^2 x = 1$
- 4- $\cos^2 x - \cos^2 y = \sin^2 y - \sin^2 x = \frac{1}{1 + \tan^2 x} - \frac{1}{1 + \tan^2 y}$
- 5- $(\tan x \tan y)(\cot x + \cot y) = \tan x + \tan y$

Exercice N°4

- 1- a- Montrer que pour tous x et y réels on a : $\cos(x+y) + \cos(x-y) = 2\cos x \cos y$
b- En déduire que pour tout x réel on a : $\cos x + \cos(x + \frac{2\pi}{3}) + \cos(x - \frac{2\pi}{3}) = 0$
- 2- Montrer que pour tout x réel on a :
a- $2(1 - \cos 2x) - \sin^2 2x = 4\sin^4 x$
b- $2\sin(\frac{\pi}{4} - x)\cos(\frac{\pi}{4} - x) = \cos 2x$
- 3- Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R} - \{k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\}$, on a : $\tan x + \frac{1}{\tan x} = \frac{2}{\sin 2x}$

Exercice N°5

Simplifier les expressions suivantes

- 1- $(\cos x + \sin x)^2 + (\cos x - \sin x)^2 - 2$
- 2- $\cos^4 x - \sin^4 x$
- 3- $\frac{\cos^2 x - \sin^2 y}{\sin^2 x \sin^2 y} - \cot^2 x \cot^2 y$
- 4- $\cos^6 x + \sin^6 x$
- 5- $\frac{\sin 2x}{\sin x} - \frac{\cos 2x}{\cos x}$

Exercice N°6

- 1- Montrer que $\cos^4 x = \frac{3}{8} + \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{8} \cos 4x$
- 2- Montrer que $\cos^4 \frac{\pi}{8} + \cos^4 \frac{3\pi}{8} + \cos^4 \frac{7\pi}{8} = \frac{3}{2}$
- 3- Sachant que $\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, donner la valeur de $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\tan \frac{\pi}{24}$
- 4- Montrer que $\tan^2 \frac{\pi}{12} + \tan^2 \frac{5\pi}{12} = 14$

Trigonométrie

Exercice N°7

- 1- Exprimer à l'aide de
- $\sin 2x$
- et
- $\cos 2x$

$$A = \cos^2 x - 2 \sin x \cos x - 5 \sin^2 x$$

- 2- Montrer que pour tout
- x
- réel tel que
- $\sin x \neq -1$
- on a :
- $\frac{1-\sin x}{1+\sin x} = \tan^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)$

Exercice N°8

- 1- Calculer
- $A = \sin \frac{\pi}{12} \sin \frac{7\pi}{12}$
- ;
- $B = \cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} \cos \frac{6\pi}{7}$

- 2- Montrer les égalités suivantes

$$a) 4 \sin x \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \sin\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) = \sin 3x$$

$$b) \frac{\cos 2x - \cos 4x}{\cos 2x + \cos 4x} = \tan 3x \tan x$$

Exercice N°9

Soient $S = \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$ et $S' = \cos\left(\frac{3\pi}{5}\right) \cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$

- 1- Calculer
- $2S \sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$
- en déduire les valeurs de
- S
- et
- S'

- 2- Montrer que
- $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = -\frac{1}{4}$
- déduire la valeur de
- $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$

Exercice N°10

- 1- Soient
- $P_1 = \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$
- et
- $Q_1 = \sin\left(\frac{\pi}{5}\right) \sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)$

Calculer $P_1 Q_1$ et en déduire la valeur de P_1

- 2- Soient
- $P_2 = \cos\left(\frac{\pi}{7}\right) \cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) \cos\left(\frac{3\pi}{7}\right)$
- et
- $Q_2 = \sin\left(\frac{\pi}{7}\right) \sin\left(\frac{2\pi}{7}\right) \sin\left(\frac{3\pi}{7}\right)$

Calculer $P_2 Q_2$ en déduire la valeur de P_2

Exercice N°11

- 1- Montrer que pour
- $a \in \mathbb{R} - \{k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\}$
- on a :
- $\frac{1}{\sin 2a} = \cot ga - \cot g2a$

- 2- En déduire la valeur de la somme

$$S_n = \frac{1}{\sin a} + \frac{1}{\sin 2a} + \frac{1}{\sin 4a} + \dots + \frac{1}{\sin 2^n a}$$

Exercice N°12

Pour n dans $\mathbb{N}$ et a et h deux réels tel que $h \neq 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ on pose

$$S = \cos a + \cos(a+h) + \cos(a+2h) + \dots + \cos(a+nh)$$

$$S' = \sin a + \sin(a+h) + \sin(a+2h) + \dots + \sin(a+nh)$$

- 1- Former le produit
- $2S \cdot \sin \frac{h}{2}$
- . Décomposer en somme les produit du second membre

simplifier et déduire la valeur de S

- 2- Former le produit
- $2S' \cdot \sin \frac{h}{2}$
- . Décomposer en somme les produit du second membre

simplifier et déduire la valeur de S'

Exercice N°13

Pour $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ On donne $\sin x = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$

- 1- Calculer
- $\cos 2x$

- 2- Vérifier que
- $\cos 4x = \sin x$
- , En déduire
- x

Trigonométrie

Exercice N°

1- Montrer que pour tout x réel on a : $\cos x + \sqrt{3} \sin x = 2\cos(x - \frac{\pi}{3}) = 2\sin(x + \frac{\pi}{6})$

2- Dédire alors que : $\cos(\frac{5\pi}{12}) + \sqrt{3} \sin(\frac{5\pi}{12}) = 2\cos(\frac{\pi}{18})$

3- Dédire donc $\frac{1}{\sin \frac{5\pi}{18}} + \frac{\sqrt{3}}{\cos \frac{5\pi}{18}} = 4$

4- Soit $f(x) = 1 + 2\cos 2x + \sqrt{3} \sin 2x$

a) Vérifier que $f(x) = 2\cos 2x + 2\sqrt{3} \cos x \sin x$

b) Montrer alors que $f(x) = 4\cos x \sin(x + \frac{\pi}{6})$

c) Calculer de deux manières $f(\frac{\pi}{12})$. Dédire alors $\cos \frac{\pi}{12}$

5- Pour $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[- \{ \frac{\pi}{6} \}$ on considère $g(x) = \frac{1 + 2\cos x}{1 + \cos 2x + \sqrt{3} \sin 2x}$

a) Montrer que $g(x) = \frac{\cos x}{2\sin(x + \frac{\pi}{6})}$

b) Calculer de deux manières $g(-\frac{\pi}{12})$

Dédire que $\cotg(\frac{\pi}{12}) = 2 + \sqrt{3}$