

Trigonométrie

Exercice N°1

Pour $x \in \mathbb{R}$, calculer les expressions suivantes en fonction de $\cos x$ et $\sin x$

- 1- $\sin(5\pi - x) + \cos(\frac{5\pi}{2} + x) + \sin(\frac{5\pi}{2} - x)$
- 2- $\sin(x + \frac{3\pi}{2}) + \sin(3\pi - x) + \cos(3\pi - x) + \cos(x + \frac{3\pi}{2})$

Exercice N°2

- 1- Calculer $\cos x$ et $\sin x$ sachant que $\tan x = 2$ et $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$
- 2- Calculer $\cos x$ et $\tan x$ sachant que $\sin x = \frac{-1}{4}$ et $\pi \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$

Exercice N°3

Démontrer les résultats suivants

- 1- $(\sin x + \cos x)^2 = 1 + 2\cos x \sin x$
- 2- $(\sin x - \cos x)^2 = 1 - 2\cos x \sin x$
- 3- $\cos^4 x + \sin^4 x + 2\sin^2 x \cos^2 x = 1$
- 4- $\cos^2 x - \cos^2 y = \sin^2 y - \sin^2 x = \frac{1}{1 + \tan^2 x} - \frac{1}{1 + \tan^2 y}$
- 5- $(\tan x \tan y)(\cot x + \cot y) = \tan x + \tan y$

Exercice N°4

- 1- a- Montrer que pour tous x et y réels on a : $\cos(x+y) + \cos(x-y) = 2\cos x \cos y$
b- En déduire que pour tout x réel on a : $\cos x + \cos(x + \frac{2\pi}{3}) + \cos(x - \frac{2\pi}{3}) = 0$
- 2- Montrer que pour tout x réel on a :
a- $2(1 - \cos 2x) - \sin^2 2x = 4\sin^4 x$
b- $2\sin(\frac{\pi}{4} - x)\cos(\frac{\pi}{4} - x) = \cos 2x$
- 3- Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R} - \{k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\}$, on a : $\tan x + \frac{1}{\tan x} = \frac{2}{\sin 2x}$

Exercice N°5

Simplifier les expressions suivantes

- 1- $(\cos x + \sin x)^2 + (\cos x - \sin x)^2 - 2$
- 2- $\cos^4 x - \sin^4 x$
- 3- $\frac{\cos^2 x - \sin^2 y}{\sin^2 x \sin^2 y} - \cot^2 x \cot^2 y$
- 4- $\cos^6 x + \sin^6 x$
- 5- $\frac{\sin 2x}{\sin x} - \frac{\cos 2x}{\cos x}$

Exercice N°6

- 1- Montrer que $\cos^4 x = \frac{3}{8} + \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{8} \cos 4x$
- 2- Montrer que $\cos^4 \frac{\pi}{8} + \cos^4 \frac{3\pi}{8} + \cos^4 \frac{7\pi}{8} = \frac{3}{2}$
- 3- Sachant que $\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, donner la valeur de $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\tan \frac{\pi}{24}$
- 4- Montrer que $\tan^2 \frac{\pi}{12} + \tan^2 \frac{5\pi}{12} = 14$

Trigonométrie

Exercice N°7

- 1- Exprimer à l'aide de
- $\sin 2x$
- et
- $\cos 2x$

$$A = \cos^2 x - 2 \sin x \cos x - 5 \sin^2 x$$

- 2- Montrer que pour tout
- x
- réel tel que
- $\sin x \neq -1$
- on a :
- $\frac{1-\sin x}{1+\sin x} = \tan^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)$

Exercice N°8

- 1- Calculer
- $A = \sin \frac{\pi}{12} \sin \frac{7\pi}{12}$
- ;
- $B = \cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} \cos \frac{6\pi}{7}$

- 2- Montrer les égalités suivantes

a) $4 \sin x \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \sin\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) = \sin 3x$

b) $\frac{\cos 2x - \cos 4x}{\cos 2x + \cos 4x} = \tan 3x \tan x$

Exercice N°9

Soient $S = \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$ et $S' = \cos\left(\frac{3\pi}{5}\right) \cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$

- 1- Calculer
- $2S \sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$
- en déduire les valeurs de
- S
- et
- S'

- 2- Montrer que
- $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = -\frac{1}{4}$
- déduire la valeur de
- $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$

Exercice N°10

- 1- Soient
- $P_1 = \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$
- et
- $Q_1 = \sin\left(\frac{\pi}{5}\right) \sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)$

Calculer $P_1 Q_1$ et en déduire la valeur de P_1

- 2- Soient
- $P_2 = \cos\left(\frac{\pi}{7}\right) \cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) \cos\left(\frac{3\pi}{7}\right)$
- et
- $Q_2 = \sin\left(\frac{\pi}{7}\right) \sin\left(\frac{2\pi}{7}\right) \sin\left(\frac{3\pi}{7}\right)$

Calculer $P_2 Q_2$ en déduire la valeur de P_2

Exercice N°11

- 1- Montrer que pour
- $a \in \mathbb{R} - \left\{k \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$
- on a :
- $\frac{1}{\sin 2a} = \cot ga - \cot g2a$

- 2- En déduire la valeur de la somme

$$S_n = \frac{1}{\sin a} + \frac{1}{\sin 2a} + \frac{1}{\sin 4a} + \dots + \frac{1}{\sin 2^n a}$$

Exercice N°12

Pour n dans $\mathbb{N}$ et a et h deux réels tel que $h \neq 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ on pose

$$S = \cos a + \cos(a+h) + \cos(a+2h) + \dots + \cos(a+nh)$$

$$S' = \sin a + \sin(a+h) + \sin(a+2h) + \dots + \sin(a+nh)$$

- 1- Former le produit
- $2S \cdot \sin \frac{h}{2}$
- . Décomposer en somme les produit du second membre

simplifier et déduire la valeur de S

- 2- Former le produit
- $2S' \cdot \sin \frac{h}{2}$
- . Décomposer en somme les produit du second membre

simplifier et déduire la valeur de S'

Exercice N°13

Pour $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ On donne $\sin x = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$

- 1- Calculer
- $\cos 2x$

- 2- Vérifier que
- $\cos 4x = \sin x$
- , En déduire
- x

TrigonométrieExercice N°14

- 1- Montrer que pour tout réel $x \neq \frac{k\pi}{2}$ on a : $\cotg x = \frac{1+\cos 2x}{\sin 2x}$
- 2- En déduire la valeur de $\cotg \frac{5\pi}{12}$
- 3- Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{\sin 3x - 2\sin 4x + \sin 5x}{\cos 3x - 2\cos 4x + \cos 5x}$
 - a) Déterminer le domaine de définition de f
 - b) Simplifier le domaine de définition de $f(x)$
 - c) Résoudre dans $\mathbb{R}$ puis dans $[-\pi, \pi]$ l'équation $f(x) = 2 + \sqrt{3}$
- 4- Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $(2 + \sqrt{3}) \sin x - \cos x = 1$

Exercice N°15

Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{1+2\cos 2x}{\sqrt{3}-2\sin x}$

- 1- Trouver le domaine de définition de f
- 2- Résoudre dans $\mathbb{R}$ puis dans $[-\pi, \pi]$ l'équation $f(x) = 0$
- 3-
 - a) Montrer que pour tout x dans D_f on a : $f(x) = \sqrt{3} + 2\sin x$
 - b) Déduire l'ensemble des solutions de l'équation : $f(x) = 2\sqrt{3}$
 - c) Déduire les réels de D_f vérifiant $f(x) = f(\frac{\pi}{3} + x)$

Exercice N°16

- 1- Montrer que pour $x \neq (2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z}$; on a : $\tg \frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1+\cos x}$
- 2- En déduire que $\tg \frac{\pi}{8} = \sqrt{2}-1$
- 3-
 - a) Transformer en produit l'expression : $\cos x + \cos 3x$
 - b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\cos x + 2\cos 2x + \cos 3x = 0$
 - c) Construire les points images des solutions sur le cercle trigonométrique
- 4- On pose $f(x) = \frac{\sin x + 2\sin 2x + \sin 3x}{\cos x + 2\cos 2x + \cos 3x}$
 - a) Déterminer le domaine de définition de f
 - b) Montrer que pour tout x dans D_f on a : $f(x) = \tg 2x$
 - c) Résoudre dans $\mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{2}-1$

Exercice N°17

- 1-
 - a) Vérifier que pour tout x réel on a : $\sqrt{3} \cos 2x - \sin 2x = 2\cos(2x + \frac{\pi}{6})$
 - b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ puis dans $[0, 2\pi]$ l'équation : $\sqrt{3} \cos 2x - \sin 2x + \sqrt{3} = 0$
 - c) Placer les points images des solutions sur le cercle trigonométrique
- 2- On pose $f(x) = \sqrt{3} \cos 2x - \sin 2x + \sqrt{3}$
 - a) Montrer que $f(x) = 4\cos x \cos(x + \frac{\pi}{6})$
 - b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = 0$

Exercice N°18

- 1- Montrer que $\cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ et que $\sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$
- 2- Résoudre alors dans $\mathbb{R}$ l'équation : $(\sqrt{3} + 1)\cos x + (\sqrt{3} - 1)\sin x = 2$

Exercice N°19

- 1- Montrer que pour tout x réel on a : $2\cos^2(x - \frac{\pi}{4}) - 2\sin x \cos x = 1$
- 2-
 - a) Transformer sous la forme $r\cos(x - \theta)$: l'expression $\sqrt{3} \cos 2x - \sin 2x$
 - b) Résoudre alors dans $\mathbb{R}$ puis dans $[-\pi, \pi]$ l'équation : $\sqrt{3} \cos 2x - \sin 2x = 1$

Trigonométrie

3- Soit $f(x) = \sqrt{3} - 2[\cos^2(x - \frac{\pi}{4}) + \sqrt{3} \sin^2 x]$

- Montrer que $f(\frac{\pi}{2} + x) + f(x) = -2$
- Montrer que pour tout réel x on a : $f(x) = -\sin 2x + \sqrt{3} \cos 2x - 1$
- En déduire que $f(x) = 1 - 4\sin^2(x + \frac{\pi}{12})$

Exercice N°20

Soient les fonctions $f(x) = \frac{-1 + 2\cos 2x}{1 + \cos 2x - \sqrt{3} \sin 2x}$ et $g(x) = \frac{1 + \sqrt{3} \tan x}{2}$

- Mettre $\cos 2x - \sqrt{3} \sin 2x$ sous la forme $r \cos(2x - \theta)$
 - Résoudre dans $\mathbb{R}$ puis dans $[-\pi, \pi]$ l'équation : $1 + \cos 2x - \sqrt{3} \sin 2x = 0$
- Déterminer chacun des deux domaines de définition de f et g notés D_f et D_g
- Montrer que pour tout x dans D_f on a : $f(x) = \frac{\cos^2 x - 3\sin^2 x}{2\cos x (\cos x - \sqrt{3} \sin x)}$
 - En déduire que pour tout x dans D_f on a : $f(x) = g(x)$ puis déduire la valeur de $\tan \frac{\pi}{12}$

4- Résoudre dans $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ l'inéquation : $g(x) \leq 0$

Exercice N°21

- On pose pour tout x réel, $f(x) = 1 + \cos 2x + \sqrt{3} \sin 2x$
 - Montrer que : $2\sin(x + \frac{\pi}{6}) = \cos x + \sqrt{3} \sin x$
 - En déduire que $f(x) = 4\cos x \cdot \sin(x + \frac{\pi}{6})$, puis déduire la valeur de $\cos \frac{\pi}{12}$
 - Résoudre dans $\mathbb{R}$ puis dans $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ l'équation $f(x) = 0$
- Soit $g : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R} ; x \mapsto \frac{1 + \cos 2x}{1 + \cos 2x + \sqrt{3} \sin 2x}$; On pose $E =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\setminus \{-\frac{\pi}{6}\}$
 - Montrer que pour tout x dans E , $g(x) = \frac{\cos x}{2\sin(x + \frac{\pi}{6})}$. En déduire que $\cotg \frac{\pi}{12} = 2 + \sqrt{3}$ (On pourra exprimer de deux manières $g(-\frac{\pi}{12})$)
 - Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $(2 + \sqrt{3})\cos x + \sin x = 0$
 - Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $(2 + \sqrt{3})\cos x + \sin x > 0$