

EXERCICE N°1

Soit $a \in \mathbb{R}$. Démontrer que :

1- $(\cos a - \sin a)^2 = 1 - 2\cos a \cdot \sin a = 1 - \sin 2a$

2- $\sin^3 a + \sin a \cdot \cos^2 a = \sin a$

EXERCICE N°2

Soit $a \in \mathbb{R}$. Démontrer que :

1- $\cos^3 a + \cos a \cdot \sin^2 a = \cos a$

2- $\cos^4 a - \sin^4 a = 2\cos^2 a - 1$

3- $(\sin a + \cos a)^2 = 1 + 2\sin a \cdot \cos a$

4- $(\sin a + \cos a)^2 + (\sin a - \cos a)^2 = 2$

EXERCICE N°3

Soit $a \in \mathbb{R}$. Démontrer que :

1- $(1 - \sin a)(1 + \sin a) = \cos^2 a$

2- $\sin^2 a + 2\cos^2 a = 1 + \cos^2 a$

3- $(1 + \tan^2 a)(1 - \sin^2 a) = 1$

4- $\tan^2 a - \sin^2 a = \tan^2 a \cdot \sin^2 a$

EXERCICE N°4

Montrer que :

1- $\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 2\sin^2 x \cdot \cos^2 x$

2- $\sin^6 x + \cos^6 x = 1 - 3\sin^2 x \cdot \cos^2 x$

3- $\frac{\cos x + \sin x}{\cos x - \sin x} = \frac{\cos 2x}{1 - \sin 2x}$

EXERCICE N°5

Exprimer l'expression suivante en fonction de $\cos 2x$ et $\sin 2x$.

$$A = \cos^2 x - 2\sin x \cdot \cos x - 5\sin^2 x$$

EXERCICE N°6

De la relation $2\cos^2 x = 1 + \cos 2x$, déduire : $\cos^4 x = 3/8 + 1/2 \cos 2x + 1/8 \cos 4x$

Calculer : $\cos^4(\pi/8) + \cos^4(3\pi/8) + \cos^4(5\pi/8) + \cos^4(7\pi/8)$

EXERCICE N°7

Démontrer les identités suivantes :

1- $2\cos(a+b) \sin(a-b) = \sin 2a - \sin 2b$ et $2\sin(a+b) \sin(a-b) = \cos 2b - \cos 2a$

2- $\operatorname{tg} 2a - \operatorname{tga} = \frac{\operatorname{tga}}{\cos 2a}$

3- $\sin 2a = \frac{2}{\operatorname{tga} + \cot ga}$

4- $\cos^4 a - \sin^4 a = \cos 2a$

5- $\cos^2 2a - \sin^2 a = \cos a \cdot \cos 3a$

6- $\sin 3a \cdot \sin^3 a + \cos 3a \cdot \cos^3 a = \cos^3 2a$

EXERCICE N°8

Simplifier les expressions suivantes :

$$A = \frac{1 - 2 \cos x + \cos 2x}{1 + 2 \cos x + \cos 2x} \quad B = \frac{\sin 5x}{\sin x} - \frac{\cos 5x}{\cos x}$$

$$D = \frac{\sin 3x}{\sin x} + \frac{\cos 3x}{\cos x} \quad E = \frac{\sin 2x}{\sin x} - \frac{\cos 2x}{\cos x}$$

EXERCICE N°9

Soit $f(x) = \frac{\sin x + \sin 3x + \sin 5x}{\cos x + \cos 3x + \cos 5x}$

a) Montrer que $f(x) = \operatorname{tg} 3x$

b) En déduire la valeur de $A = \frac{\sin 10^\circ + \sin 30^\circ + \sin 50^\circ}{\cos 10^\circ + \cos 30^\circ + \cos 50^\circ}$

EXERCICE N°10

Soit $h(x) = -3\cos^2 x - 2\sqrt{3} \sin x \cdot \cos x - 5\sin^2 x + 4$

- a) Exprimer $h(x)$ en fonction de $\cos 2x$ et $\sin 2x$
- b) En déduire l'écriture de $h(x)$ sous la forme $r \cos(2x - \varphi)$
- c) Calculer le nombre $A = \frac{1}{\sin 10^\circ} - \frac{\sqrt{3}}{\cos 10^\circ}$

EXERCICE N°11

L'équation du second degré : $x^2 - 5x + 3 = 0$ possède deux solutions réelles x' et x'' .

Soient a et b tels que $x' = \tan a$, $x'' = \tan b$

Sans calculer x' et x'' . Calculer $\tan(a+b)$

EXERCICE N°12

Mettre sous forme de produit ou quotient:

- 1- $\cos^2 2x - \cos^2 x$
- 2- $\sin^2 2x - \sin^2 x/2$
- 3- $\sin^2 5x/2 - \cos^2 3x/4$
- 4- $\tan 2x - \tan x$
- 5- $\tan x + \tan 3x$
- 6- $\cos 3x - \cos^2 3x/2$
- 7- $1 + \tan x \cdot \tan 2x$
- 8- $1 + \cos 2x + 2 \cos x$
- 9- $\cos 3x - \cos^2 3x/2$
- 10- $1 + \cos x + \cos 2x$
- 11- $\sin x + \sin 2x$
- 12- $\cos x + \cos 2x$
- 13- $\sin x + \sin 2x + \sin 3x$
- 14- $1 - \cos 2x + 2 \sin x$
- 15- $\tan x + \tan 2x$

$$16- \sin^2 3x - \sin^2 x$$

EXERCICE N°13

Montrer que pour tout réel $x \neq k\pi/2$ on a :

$$\operatorname{tg} x + \frac{1}{\operatorname{tg} x} = \frac{2}{\sin 2x} \quad \text{et} \quad \operatorname{tg}^2 x + \frac{1}{\operatorname{tg}^2 x} = \frac{4}{\sin^2 2x} - 2$$

$$\text{en d\u00e9duire que } \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{12} + \operatorname{tg}^2 \frac{5\pi}{12} = 14$$

EXERCICE N°15

$$\text{Calculer le r\u00e9el } \frac{\sin \frac{3\pi}{11} + \sin \frac{7\pi}{11}}{\sin \frac{6\pi}{11} \cdot \cos \frac{9\pi}{11}}$$

EXERCICE N°16

Exprimez en fonction de $\cos 2x$ les r\u00e9els suivants :

$$A = \cos^4 x - \sin^4 x$$

$$B = \cos^4 x + \sin^4 x - 1/2 \sin^2 2x$$

$$C = \cotg^2 x - \operatorname{tg}^2 x$$

$$D = 4\cos^4 x - 4\cos^2 x + 1$$

$$E = -8\sin^6 x - 6\sin^2 x + 12\sin^4 x$$

$$F = \frac{1 + \operatorname{tg}^2 x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} \quad (\cos x \text{ et } \cos 2x \text{ sont non nuls})$$

EXERCICE N°17

Exprimer en fonction de $t = \operatorname{tg} x/2$, les expressions suivantes .

$$A = \frac{\sin x + \cos x - 1}{3 \cos x - \sin x + 2}$$

$$B = \operatorname{tg} x + \cotg x$$

$$C = \frac{1 - \cos x - \sin x}{1 + \cos x + \sin x}$$

$$D = \frac{\sin x + \cos x}{3 \sin x - 2 \cos x}$$

$$E = \frac{2 + \sin x}{2 - \sin x}$$

EXERCICE N°18

Ecrire sous la forme $a \cos(bx - c)$

$$A = \cos x - \sin x$$

$$B = -2 \cos x - 2 \sin x$$

$$C = \cos 3x + \sin 3x$$

$$D = -5\sqrt{3} \sin 2x - 5 \cos 2x$$

$$E = -1/2 \cos 3x + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 3x$$

EXERCICE N°19

Soient a, b et c trois réels .

1- a) Transformer en produit l'expression $S = \sin a + \sin b + \sin c - \sin(a+b+c)$

b) En déduire alors l'expressions de $\sin 3a$ en fonction de $\sin a$

2- Soit un triangle ABC non rectangle et on pose $\hat{CAB} = a$; $\hat{ABC} = b$ et $\hat{ACB} = c$

a) Que devient alors S ?

b) Montrer que $\operatorname{tga} + \operatorname{tgb} + \operatorname{tgc} = \operatorname{tga} \cdot \operatorname{tgb} \cdot \operatorname{tgc}$

$$\cos 2a + \cos 2b + \cos 2c = 1 - 4 \sin a \cdot \sin b \cdot \sin c$$

$$\frac{\sin b + \sin c}{\cos b + \cos c} = \cot g \frac{a}{2}$$

$$\cos^2 a + \cos^2 b + \cos^2 c = 1 - 2 \cos a \cdot \cos b \cdot \cos c$$

EXERCICE N°20

1- Montrer que
$$\frac{\cos \frac{\pi}{12} + \sin \frac{\pi}{12}}{\cos \frac{\pi}{12} - \sin \frac{\pi}{12}} = \sqrt{3}$$

2- Montrer que $\cos x - \sin x = -\sqrt{2} \cdot \sin(x - \frac{\pi}{4})$

3- Montrer que Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\cos^4 x + \cos^4(x + \frac{\pi}{4}) + \cos^4(x + \frac{2\pi}{4}) + \cos^4(x + \frac{3\pi}{4}) = \frac{3}{2}$$